

KONSTRUKTION VON STROM UND  
ENERGIEIMPULSTENSOR IN EINER LOKAL  
EICHINVARIANTEN, RENORMIERBAREN,  
SELBSTWECHSELWIRKENDEN SPINORTHEORIE  
UND DIE DARSTELLUNG EINER ALGEBRA  
DIESER STRÖME

NORBERT J. WINTER

MÜNCHEN

1973



Dipl.-Kfm. A. Koch  
(Kurfürstendruck)  
8 München 23  
Clemensstraße 27  
Telefon 242142





Digitized by the Internet Archive  
in 2026

Konstruktion von Strom und-Energieimpulstensor in einer  
lokal eichinvarianten, renormierbaren, selbstwechselwirkenden  
Spinortheorie und die Darstellung einer Algebra dieser Ströme

Inaugural Dissertation  
zur Erlangung der Doktorwürde  
der Fakultät für Physik  
der Ludwig-Maximilians-Universität  
München

vorgelegt von  
Norbert J. Winter  
München  
1973



1. Berichterstatter: Prof. Dr. H.P. Dürr

2. Berichterstatter: Prof. Dr. F. Bopp

Tag der mündlichen Prüfung: 8. März 1973

## Inhaltsverzeichnis

|                                                                                                                                                                      | Seite |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <u>Einleitung:</u> Darstellung des Modells und seine zu erwartenden Eigenschaften                                                                                    | 1     |
| <u>Kapitel I:</u> Lokale Eichinvarianz der nichtlinearen Spinorthorie                                                                                                |       |
| <u>I. § 1:</u> Die lokale Eichinvarianz der nichtlinearen Spinorthorie                                                                                               | 9     |
| <u>I. § 2:</u> Vergleich unserer lokal eichinvarianten Spinorthorie mit konventionellen Eichtheorien                                                                 | 20    |
| <u>I. § 3:</u> Die lokale Eichinvarianz an Hand des Beispiels der zweikomponentigen Spinorthorie                                                                     | 25    |
| <u>Kapitel II:</u> Konstruktion von lokal eichinvarianten Größen in unserer Theorie und seine Eigenschaften, i.b. unter Berücksichtigung der Feldgleichung           |       |
| <u>II. § 1:</u> Konstruktion von lokal eichinvarianten Größen                                                                                                        | 28    |
| <u>II. § 2:</u> Bedingungen der Feldgleichung an die lokal eichinvarianten Größen                                                                                    | 35    |
| <u>Kapitel III:</u> Effektive Konstruktion von erhaltenen Strömen und Energieimpulstensor mittels Operatorproduktbildung und Darstellung einer Algebra dieser Größen |       |
| <u>III. § 1:</u> Zur Problematik von erhaltenen Strömen                                                                                                              | 39    |
| <u>III. § 2:</u> Regeln zur Kommutatorbildung von Observablen mit anderen Operatoren                                                                                 | 42    |
| <u>III. § 3:</u> Konstruktion von erhaltenen Strömen                                                                                                                 | 52    |
| <u>III. § 4:</u> Konstruktion des erhaltenen Energieimpulstensors                                                                                                    | 65    |
| <u>III. § 5:</u> Das $U_1^G \times SU_3$ invariante selbstwechselwirkende Spinormodell                                                                               | 71    |
| <u>III. § 6:</u> Lichtkegelkommutator zweier Ströme in einem $U_1 \times SU_3$ -invarianten selbstwirkenden Spinormodell                                             | 74    |
| <u>Einige kurze Schlußbemerkungen</u>                                                                                                                                | 78    |



## Zusammenfassung

Wir untersuchen in dieser Arbeit ein Modell einer nichtlinearen Spinortheorie unter Verwendung der Wilsonhypothese sowie der Forderung der lokalen Eichinvarianz. In Kapitel I zeigen wir, daß in Spinortheorien mit nichtlinearer Vierer-Selbstwechselwirkung lokale Eichsymmetrien etabliert werden können, ohne zusätzliche Vektorfelder einzuführen, wenn der Spinorfeldoperator die nichtkanonische Dimension  $+ 1/2$  (in Masseneinheiten) hat. In diesem Fall ist die Theorie dann skaleninvariant bei kleinen Abständen und daher formal renormierbar. Die Operatorprodukte können dann gemäß den Vorschriften von Zimmermann und Wilson definiert werden. Die übliche Rolle der Eichfelder übernehmen in dieser Spinortheorie die Bilinearkombinationen  $:\psi^* \gamma_\mu \psi:$  aus den nichtkanonischen Spinorfeldern, die die korrekte Dimension  $+1$  von Bosonoperatoren haben. Die physikalischen Fermionfelder hängen mit der Ableitung auf diesen Spinorfeldern oder mit 3-Produkten dieser Felder zusammen.

In Kapitel II wird eine Methode ausgeführt, lokal eichinvariante  $R_{\mu\nu\lambda\sigma}$  Operatoren beliebiger Dimension als innere Ableitung aus den  $\psi^* \psi$ , nämlich als  $R_{\mu\nu\lambda\sigma} = -i \psi^* \gamma_\mu (\frac{1}{2} \gamma_{\nu\lambda}) \dots (\frac{1}{2} \gamma_{\sigma\lambda}) \psi$ , zu konstruieren. Bei Verwendung der Feldgleichung ist es nicht möglich, ohne Kenntnis der  $\psi\psi$ -Produktfunktion und ohne weitere Annahmen Aussagen über die Erhaltung der entsprechenden Dimension 3 bzw. Dimension 4 lokal eichinvarianten Operatoren zu machen und damit den Strom bzw. Energieimpulstensor zu identifizieren.

Daher wurde in Kapitel III eine Methode entwickelt, den Strom bzw. Energieimpulstensor explizit aus den  $\Psi(x)$  auf der Basis seiner Generator- und Erhaltungseigenschaft, für die wir spezielle Kommutatorrelationen verwenden, aufzubauen. Damit konnte i. b. der Strom-Strom-Kommutator am Lichtkegel berechnet werden. Als Grenzfall davon wurde der gleichzeitige Strom-Strom-Kommutator angegeben, für den, nachgewiesen für Vorwärtsmatrixelemente, sich die Stromalgebra automatisch ergab.

Der Strom-Strom-Kommutator am Lichtkegel unterscheidet sich in vielen und wesentlichen Punkten von dem der freien Theorie. Indem wir unser Modell

mit der folgenden algebraischen Struktur anreichern:  $U_1 \otimes U_1 \otimes SU_3 \otimes SU_3$   
Invarianz und  $U_1 \otimes U_1$  lokale Eichinvarianz, so daß es einer selbstwechselwir-  
kenden Quarktheorie entspricht, können wir durch den Strom-Strom-Kommutator  
am Lichtkegel einige Aspekte der tiefinelastischen Lepton-Hadron-Streuung be-  
schreiben, und erhalten unter anderem für die Energie-Impuls-Summenregel 13/16  
des Wertes der freien Theorie, nämlich  $\sim 1.08$ , der mit den vorliegenden Daten  
im guten Einklang steht.

Einleitung: Darstellung des Modells und seiner zu erwartenden Eigenschaften.

In dieser Arbeit wollen wir ein Modell - bzw. einige Aspekte davon - einer nichtlinearen Spinortheorie untersuchen, wie es aus der Annahme der Gültigkeit der Wilsonhypothese sowie der lokalen Eichinvarianz der Theorie folgt.

Als wesentliches Prinzip einer selbstwechselwirkenden Spinortheorie formulieren wir nach wie vor ein Aufbauprinzip, nach dem alle Felder und Observablen sich aus den zugrundegelegten abstrakten selbstwechselwirkenden Spinorfeldern  $\Psi(x)$  aufbauen lassen<sup>(1)</sup>. Daß man einem solchen Aufbauprinzip Spinoren zugrundelegt, hängt mit der wichtigen Eigenschaft zusammen, daraus alle irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe aufbauen zu können.

Darüber hinaus erscheint aber, um einem solchen abstrakt formulierten Aufbauprinzip innere Gestalt geben zu können, die Annahme der Wilsonhypothese sowie das Prinzip der lokalen Eichinvarianz geradezu als der physikalische Rahmen, in dem sich dieses Aufbauprinzip konkret konstituieren läßt und eine Identifikation von physikalisch relevanten Größen möglich wird:

Die Wilsonhypothese, um die "composites" aus den abstrakten Konstituendenfeldern als endliche Operatoren zu definieren,

das Prinzip der lokalen Eichinvarianz wiederum, um der Wilsonhypothese in Form eines, nennen wir es ruhig Auswahlprinzips, Eindeutigkeit zu geben und damit den "composites" physikalische Eigenschaften zuzuordnen.

Die Wilsonhypothese<sup>(2)</sup> enthält als entscheidende Voraussetzung die asymptotische Skaleninvarianz bei kleinen Abständen und damit verknüpft die Renormierbarkeit der Theorie. Die Wichtigkeit der Skaleninvarianz im Zusammenhang mit der Definition von Operatorprodukten ist eindeutig in den "power-counting" Argumenten von Dyson sowie allgemein in der Beziehung zwischen Renormierbarkeit einer Wechselwirkung und seiner Dimension, auf die Umezawa et al<sup>(3)</sup> hingewiesen haben, erkennbar.

Unter asymptotischer Skaleninvarianz verstehen wir den Umstand, daß es physikalische Situationen geben soll, in denen die Masse der betreffenden Teilchen keine Rolle spielen, so soll gelten, daß Skaleninvarianz bei extrem hohen Energien von Bedeutung wird. Als Hypothese formulieren wir deshalb hier, daß

Das Asymptotikum der Skaleninvarianz bei kleinen Abständen sowie in der Nähe des Lichtkegels angenähert erreicht ist. Für eben diese spezielle physikalische Region gilt die Wilsonhypothese für solche Modelle, die "maximal" eine renormierbare Wechselwirkung besitzen, d.h. nichtrenormierbare Theorien fallen aus diesem Rahmen.

Auf die Frage, wie hier der Mechanismus der gebrochenen Skaleninvarianz aufzufassen ist, wollen wir in dieser Arbeit nicht eingehen. Insbesondere, ob der Skeletonmechanismus von Mack und Kastrup zu Grunde liegt, oder - was wir eher vermuten - ein Mechanismus, der gewisse Ähnlichkeit mit der Wilson'schen Vorstellung hat, daß die Skaleninvarianz durch die renormierbare Wechselwirkung selbst verletzt wird, also nicht von zusätzlich eingeführten Massentermen, insbesondere diese Frage also untersuchen wir nicht. Ferner auch nicht, ob derselbe physikalische Mechanismus Skaleninvarianz und chirale Symmetrie bricht, wenngleich wir bestimmte Ansatzpunkte sehen, in unserem Modell darüber Aussagen zu machen.

Wir geben zunächst eine kurze Formulierung der wesentlichen Punkte der Wilsonhypothese. Für ausführliche Information dazu verweisen wir auf (2).

Oben war schon die Notwendigkeit der asymptotischen Skaleninvarianz und der Renormierbarkeit der Wechselwirkung hervorgehoben worden. Die Regeln der Wilsonhypothese lauten damit im wesentlichen:

Die Operatorproduktentwicklung von Produkten

$$(0.1) \quad A(x) \cdot B(y) \quad \text{für } (x-y) \rightarrow 0 \quad \text{oder } (x-y)^2 \rightarrow 0$$

hat eine Form

$$(0.2) \quad A(x) \cdot B(y) = \sum_n C_n(x-y) O_n(y)$$

Diese Entwicklung teilt sich auf in die c-Zahl-Funktionen  $C_n(x-y)$ , die vom Relativabstand zwischen den beiden Operatoren  $A(x)$  und  $B(y)$  abhängen, sowie in die lokalen Operatoren  $O_n(y)$ , die nur von dem einen Punkt  $y$  abhängen (Die Entwicklung kann auch mit Operatoren  $O_n$  an der Stelle  $(x+y)$  oder  $x$  konstruiert werden). Die Singularitäten in dem Produkt sind vollständig in den Funktionen

$C_n(x-y)$  enthalten, während der Operatorcharakter des Produkts durch die Operatoren  $O_n$  dargestellt ist.

Nun wird angenommen, daß in einer jeden Operatorproduktentwicklung ein ganzer Satz von Operatoren  $O_n(y)$  existiert. Diese Operatoren sind lokale Operatoren.  $O_0(y)$  ist dabei der "wichtigste" Operator und zwar in dem Sinne, als er die am stärksten singuläre Koeffizientenfunktion  $C_0(x-y)$  mit sich führt. Allerdings kann  $C_0(x-y)$  identisch Null sein, oder das Matrixelement von  $O_0(y)$  kann identisch verschwinden. In diesem Fall liefert dann  $O_1(y)$  den "wichtigsten" Beitrag, etc. Ferner existiert eine Dimensionsregel für die Operatorproduktentwicklung. Die Abhängigkeit des  $C_n(x-y)$  von  $(x-y)$  wird durch die Dimension von  $C_n(x-y)$  festgelegt, es wird dabei (wegen der Skaleninvarianz) angenommen, daß  $C_n(x-y)$  keine dimensionierten Parameter wie z.B. Massen enthält. Dann muß die Dimension von  $C_n(x-y) \cdot O_n(y)$  gleich sein der Dimension des Produkts  $A(x) \cdot B(y)$  selber. Mit solch einer Dimensionsregel ist der Grad der Singularität von  $C_n(x-y)$  festgelegt.

Dies ist das Ideal der Operatorproduktentwicklung. Zu einzelnen kritischen Bemerkungen dazu siehe (4). Dabei ist insbesondere zu berücksichtigen, daß Massenterme sowie vielleicht schon renormierbare Wechselwirkung "als solche" (5) die Skaleninvarianz brechen. Dennoch aber steuert der Geist der Skaleninvarianz noch das Verhalten der am stärksten singulären Funktion, und das ist die Idee der asymptotischen Skaleninvarianz.

Nun, in diesem Zusammenhang schon ein erstes Wort zur Dimension des abstrakten Spinorfeldes in unserem Spinormodell. Wilson (5) hat in einer Analyse des Thirringmodells gezeigt, daß Skaleninvarianz auch in einer Theorie bestehen kann, in der die kanonischen Kommutatorrelationen durch Renormierungseffekte zerstört sind. Während dabei die Skaleninvarianz weiterbesteht, ändern sich dann im Thirringmodell die "scaling-laws" für die Felder und zwar in Abhängigkeit von der Kopplungskonstanten. Wir wollen diesen Tatbestand eines Renormierungseffekts verallgemeinern, indem wir sagen, daß es durch nichts gerechtfertigt ist, für wechselwirkende Felder die kanonische Dimension der freien Felder anzunehmen. Das wird im folgenden dann sehr wichtig.

Um eine Spezifikation der Dimension unserer selbstwechselwirkenden Spinorfelder ausführen zu können, verwenden wir das andere von uns als wesentlich herausgestellte Prinzip, nämlich das der lokalen Eichinvarianz. Dies ist, wie schon erwähnt, ein Auswahlprinzip, indem es von den Observablen Invarianz unter den lokalen Eichtransformationen fordert. Für die Observablen besteht über diese Eicheigenschaften hinaus eine feste Dimensionsaussage, wie sie z.B. in ihren Generatoreigenschaften ausgedrückt wird. Zusätzlich zu den Auswahl-eigenschaften der Observablen gibt aber gerade die lokale Eichtransformation eine fixierte Aussage über die Dimension der eichvarianten Eichfelder, so z.B. für das Vektorfeld bei lokaler U(1) durch das eichvariante Verhalten

$$(0.3) \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

die feste Dimension 1 (in Masseneinheiten).

D.h. insbesondere die Dimension der eichvarianten Eichfelder wird in Eichtheorien (im Gegensatz zu Theorien ohne lokales Eichprinzip, in denen dann mit Ausnahme der Ströme und des Energieimpulstensors eigentlich keine Dimensionsaussage gemacht werden kann) festgelegt.

Bevor wir dieses Eichprinzip in unserer Theorie manifest machen, zunächst einige Worte zu den bisher untersuchten, nennen wir sie konventionelle, Eichtheorien, von denen wir uns dann in wesentlichen Punkten abheben können, bzw. deren "künstliche" Eigenschaften sich bei uns auf eine "natürlich" Weise einstellen.

Utiyama (6) hat gezeigt, daß die Ausweitung einer n-parametrigen Lie'schen Symmetriegruppe einer Feldtheorie zu einer entsprechenden Eichsymmetrie-Gruppe, in der diese Parameter dann Raum-Zeit-Funktionen sind, notwendigerweise die Einführung von n zusätzlichen Vektorfeldern erfordert, die sich inhomogen unter diesen Transformationen transformieren und die lokal an den entsprechenden erhaltenen Strom gekoppelt sind. Auf Grund ihrer inhomogenen Transformation müssen diese Vektorfelder masselos sein. Angewandt auf Phasentransformationen erhält man die Elektrodynamik mit minimaler Kopplung. Angewandt auf innere Symmetrietransformationen erhält man Yang-Mills-artige Theorien (7), die möglicherweise eine Rolle in der starken und schwachen Wechselwirkung spielen.

Auf der anderen Seite war es nun schon immer eine wesentliche Eigenschaft und Forderung in der nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen <sup>(1)</sup>, daß die einfachsten Bosonfelder, so z.B. das elektromagnetische Feld als eine lokale bilineare Kombination der abstrakten Fermion-Felder aufgebaut werden sollten. In diesem Zusammenhang der Eichinvarianz, wo man Utiyamas notwendige aber künstlich anmutende und unhandliche Einführung von zusätzlichen Eichfeldern vor Augen hat, stellt man die Frage:

Ist es in unserem Modell einer selbstwechselwirkenden Spinortheorie möglich, lokale Eichsymmetrien zu etablieren, ohne zusätzliche Vektorfelder einzuführen? Ist es möglich, daß gewisse "composites" der Spinorfelder auf Grund des Eichverhaltens der Spinorfelder das richtige Eichverhalten als Eichfelder haben?

Bei Beantwortung dieser Frage, die auf Ja lauten wird, werden wir wieder die wesentliche Rolle der Wilsonentwicklung erkennen. Entscheidend dabei gehen die zwei Punkte in unserer Theorie ein:

1.) Das abstrakte Spinorfeld ist nicht ein kanonisches Spinorfeld der konventionellen Form, sondern soll die dynamische Dimension + 1/2 (eingeprägte Massendimension) haben, im Gegensatz zum kanonischen Feld, das die Dimension 3/2 hat. Eine Bilinearform dieses abstrakten nichtkanonischen Feldes führt auf Bosonoperatoren der Dimension + 1:

$$(0.4) \quad \Phi_{phys} \sim : \psi^2 \psi :$$

Physikalische Spinorfelder der Dimension + 3/2 erhält man durch Produktbildung von 3 nichtkanonischen Spinorfeldern

$$(0.5) \quad \Psi_{phys} \sim : \psi \psi \psi :$$

oder aber bei Gültigkeit einer Feldgleichung 0.12 äquivalent zu 0.5 als Ableitung auf das Spinorfeld. In einem solchen Fall wäre das physikalische Spinorfeld, ähnlich wie das elektromagnetische Feld  $F_{\mu\nu}$  als Ableitung aus dem nichtbeobachtbaren Vektorpotential  $A_\mu$  gebildet ist, als Ableitung aus den - nennen wir es - Spinorpotential  $\Psi^{(\alpha)}$  aufgebaut.

Als Beispiel für 0.3 führen wir hier die einfachste Möglichkeit in einer zwei-Komponenten Spinorthorie an:

Für  $\xi \rightarrow 0$  gilt als Wilsonentwicklung

(0.6)

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ E_0(\xi) \Psi(\alpha - \frac{\xi}{2}) G_P \Psi(x + \frac{\xi}{2}) - \Psi(x) E'_P(\frac{\xi}{2}) \right\} = R_P(x) + \text{Terme, die verschwinden.}$$

Der  $\lim_{\xi \rightarrow 0}$  wird im kovarianten Sinne ausgeführt.

$E_0(\xi)$ ,  $E(\xi)$  dimensionslose Funktionen.

$R_P(x)$  endlicher Operator der Dimension 1:  $R_P(x) = : \Psi^\dagger G_P \Psi : (x)$

Mit

$$(0.7) \quad \Psi(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \Psi(x) \quad \text{folgt}$$

$$(0.8) \quad E_0 \Psi^*(x - \frac{\xi}{2}) G_P \Psi(x + \frac{\xi}{2}) \rightarrow e^{-i[\alpha(x+\frac{\xi}{2}) - \alpha(x-\frac{\xi}{2})]} E_0 \Psi^*(x - \frac{\xi}{2}) G_P \Psi(x + \frac{\xi}{2})$$

D.h.

$$(0.9) \quad E_0 \Psi^\dagger G_P \Psi \rightarrow [1 - i\{\partial\alpha(x) + \text{höhere Abl.}\}] E_0 \Psi^\dagger G_P \Psi$$

Substitution von  $E_0 \Psi^\dagger G_P \Psi$  aus 0.6 in 0.9 ergibt:

$$(0.10) \quad E_0 \Psi^\dagger G_P \Psi \rightarrow [1 - i\{\partial\alpha(x) + \dots\}] \left[ \Psi^\dagger E'_P(\frac{\xi}{2}) + R_P(x) + \dots \right]$$

Der kovariante Limes  $\xi \rightarrow 0$  wird anschließend ausgeführt.

D.h.

$$4i E'_P(\frac{\xi}{2}) + R_P(x) \rightarrow 4i E'_P(\frac{\xi}{2}) + R_P(x) - \Psi^\dagger E'_P(\frac{\xi}{2}) \partial^2 \alpha(x) - i\{\partial\alpha R_P(x)\}$$

Im  $\lim_{\xi \rightarrow 0}$  gilt der kovariante Grenzprozess:  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{\xi}{2} \right\} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}$

Damit folgt für den endlichen Operator  $R_p(x)$  aus 0.6

$$(0.11) \quad \text{Unter } \underline{0.7} \text{ geht } R_p(x) \rightarrow R_p(x) + E' \partial_p \alpha(x)$$

D.h. für  $E' = 1$  gilt das gewünschte Verhalten 0.3.

D.h. aber, wir sehen hier die entscheidende Bedeutung der Wilson-Singularität  $\frac{E'}{f_2}$  aus 0.6 für das richtige Eichverhalten von  $R_p(x)$ .<sup>(3)</sup>

2.) Der nichtlineare Wechselwirkungsterm in unserer Theorie muß mit der Wilsonhypothese als lokaler Limes von Operatorprodukten definiert werden, um die Divergenz zu beseitigen. Solche "finite part"-Produkte führen, wie man weiß, auf nichtlineares Verhalten unter lokaler Eichtransformation.

Wir untersuchen Spinortheorien vom Typ

$$(0.12) \quad i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = : O_c^{(1)} \psi (\bar{\psi} O_c^{(2)} \psi) :$$

wobei  $O_c^{(1)} \times O_c^{(2)}$  gewisse Matrizen im Raum der Komponenten von  $\psi$  darstellen. Von dieser Wechselwirkung 0.12 wird ebenfalls, wenn man - wie es die Wilson-Hypothese verlangt - renormierbare Wechselwirkung hat, also nichtdimensionierte Kopplung, die Dimension + 1/2 für die abstrakten Spinorfelder  $\psi(x)$  vorgeschrieben.

Bevor wir jetzt in die Einzelheiten gehen, möchte ich doch zwei Bemerkungen vorausschicken.

Als zwei wesentliche Prinzipien haben wir die Wilson-Hypothese und die lokale Eichinvarianz in unserem Modell der Spinortheorie eingeführt. Dabei gilt per Definition, daß, wenn eine Theorie lokal eichinvariant ist, sie natürlich keine freie Theorie sein kann, d.h. wir haben durch die Forderung der lokalen Eichinvarianz einen echten Wechselwirkungstyp vorausgesetzt. Zum Zweiten, gerade, wenn man das Eichverhalten für die "composites" aus dem Eichverhalten der abstrakten Spinorfelder etwa gemäß 0.11 ableiten will, muß der Split-Vektor in der Wilson-entwicklung die Zeit enthalten, er darf also nicht rein raumartig sein. Die Notwendigkeit des Zeitanteils im Split-Vektor wird noch deutlicher, wenn man mittels des eingangs genannten Aufbauprinzips die Ströme etc. konstruiert.

Enthält aber die Wilsonentwicklung die Zeitkomponente, so liegt es nahe, daß damit schon die Dynamik zu einem gewissen Teil vorgegeben ist.

D.h.: Bei Verdeutlichung der Konsequenzen der Wilson-Hypothese sowie der lokalen Eichinvarianz unter Berücksichtigung des obengenannten sehr fundamentalen Aufbauprinzips in einer Spinortheorie liegt es nahe die Theorie auf zwei Richtungen hin zu entwickeln, die letzten Endes äquivalent sein sollten.

- a.) Eine direkte Bestimmung der Dynamik durch eine Feldgleichung;
- b.) Die Konstruktion von Observablen innerhalb des genannten und vorgegebenen Rahmens der Theorie, so insbesondere von Strömen und dem Energieimpulstensor. Das führt zu Untersuchungen von dynamischen Aussagen etwa durch Entwicklung von Strom-Stromprodukten bei kleinen Abständen sowie in der Nähe des Lichtkegels. Dann versucht man eine Ableitung der Feldgleichung aus der Kenntnis des Energieimpulstensors.

In Kapitel I. wollen wir die Entwicklungslinie a.) darstellen.

In Kapitel II. und III. die Entwicklungslinie b.).

# Kapitel I. Die lokale Eichinvarianz der nichtlinearen Spinortheorie

## I. § 1. Die lokale Eichinvarianz der nichtlinearen Spinorgleichung

Wir untersuchen eine nichtlineare Gleichung für Diracspinoren

$$(1.1.1) \quad i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = : O_i^{(1)} \psi(x) (\bar{\psi}(x) O_i^{(2)} \psi(x)) :$$

wobei  $O_i^{(1)}, O_i^{(2)}$  gewisse Matrizen im Raum der Komponenten von  $\psi(x)$ , d.h. Dirac-Matrizen multipliziert mit Matrizen, die mit den inneren Freiheitsgraden der Spinorfelder zusammenhängen, darstellen. Insbesondere könnten wir auch von einer Weyl-Spinortheorie ausgehen. Der Fall der Weyl-Theorie hängt im wesentlichen mit der Spezifikation

$$(1.1.2) \quad O_i^{(1)} \times O_i^{(2)} = g \cdot \frac{1}{2} (\gamma_\mu \times \gamma^\mu - i \gamma_\mu \gamma_5 \times i \gamma^\mu \gamma_5) = \frac{g}{2} (v - a)$$

zusammen (9).

Von der Feldgleichung 1.1.1 fordern wir Invarianz unter der inhomogenen Lorentzgruppe und bestimmten konstanten Parametertransformationen verknüpft mit inneren Freiheitsgraden im Sinne der Substitutionstransformationen.

Die formale infinitesimale Symmetrietransformation soll die Form haben:

$$(1.1.3) \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \psi(x) + \delta_A \psi(x) ; \delta_A \psi = \varepsilon^A T_A \psi(x)$$

mit  $\varepsilon^A$  als den konstanten infinitesimalen Parametern und  $T_A$  als den Generatoren dieser Transformationen im inneren Komponentenraum von  $\psi(x)$ , die den Lie-Kommutatorrelationen:

$$(1.1.4) \quad [T_A, T_B] = \sum_C f_{AB}^C T_C \quad \text{genügen,}$$

wobei  $f_{AB}^C$  die Strukturkonstanten der entsprechenden Lie-Gruppe sind. Zusätzlich fordern wir - wie in der Einleitung betont - von Gl. 1.1.1 Invarianz unter Skalentransformation:

$$(1.1.5) \quad x^\mu \rightarrow x'^\mu = \lambda x^\mu$$

Unmittelbar sieht man dann, daß die Skaleninvarianz der Gl. 1.1.1 als dynamische Dimension von  $\Psi + 1/2$  (in Masseneinheiten) verlangt.

Um nun alle genannten Symmetrien als formale Symmetrien der gesamten Theorie zu etablieren, muß man weiterhin die Invarianz der Quantisierungsbedingung unter diesen Symmetrietransformationen zeigen.

D.h. insbesondere die (asymptotische) Skaleninvarianz unserer renormierbaren Wechselwirkungstheorie fordert eine schwächere als die kanonische Singularität für den Antikommutator.

D.h. wir müssen verlangen:

(1.1.6)

$$\lim_{z^0 \rightarrow 0} \left\{ \Psi\left(\frac{z}{2}\right), \bar{\Psi}\left(-\frac{z}{2}\right) \right\} = I \lim_{z^0 \rightarrow 0} E_0(z^2, m^2) \cdot \frac{1}{4} \cdot \operatorname{sgn} z^0 \delta(z^2) + \dots$$

Das  $\dots$  soll diejenigen Terme berücksichtigen, die mit  $z^0 \rightarrow 0$  weniger singulär sind, als es der angegebene Term ist.

Zu den weiteren Symmetrieeigenschaften des Produktes zweier Felder siehe Kapitel II.

In dieser Quantisierungsbedingung ist die Skaleninvarianz im asymptotischen Sinne gemäß der Einleitung eingeführt. Als Abweichung von der strikten Skaleninvarianz läßt man in der Wilsonentwicklung "Null"-dimensionale logarithmische Funktionen  $E_0(z^2, m^2)$  zu, wie sie in der störungstheoretischen Behandlung von renormierbaren Theorien auftreten.

In einer Wechselwirkungstheorie können wir grundsätzlich nicht erwarten, daß der gleichzeitige Kommutator 1.1.6 eine reine C-Zahl wie in der freien Theorie ist. Daher erwartet man zusätzliche Terme in 1.1.6, die in dem  $\dots$  angedeutet sind. Da unsere Felder jedoch eine negative Längendimension haben, sind sie notwendigerweise mit einer weniger singulären Funktion multipliziert als sie der Hauptterm enthält.

Eine exakte Analyse des Produktes zweier Spinorfelder bei kleinen Abständen und damit auch im gleichzeitigen Limes sowie in der Nähe des Lichtkegels wird von uns in Kapitel II angegeben.

Die Forderung der Skaleninvarianz sowie der Renormierbarkeit der Theorie erlaubt es uns, mit Hilfe der Wilson-Hypothese eine Vorschrift für die Definition des "finite part" des nichtlinearen Terms in 1.1.1 anzugeben. Zu ähnlichen Entwicklungen siehe (10).

Wir entwickeln gemäß Wilson:

$$\begin{aligned}
 (1.1.7) \quad & :\Psi^\alpha \bar{\Psi}^\beta \Psi^\delta:(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \{ E_0'(\xi) E_\Delta(\zeta) T \Psi^\alpha(x+\tau\xi') \cdot \\
 & \cdot \bar{\Psi}^\beta(x+m\xi'+n\xi) \cdot \Psi^\delta(x+m\xi'+p\xi) - \int_1^{\alpha\beta\gamma} \delta((\tau-m)\xi') \cdot \\
 & \cdot \Psi^\delta_{(x+m\xi'+p\xi)} + E_0'(\xi') \cdot \int_1^{\delta\beta} ((p-n)\xi) \Psi^\alpha(x+\tau\xi') \}
 \end{aligned}$$

wobei  $E_0(\xi)$ ,  $E_0'(\xi)$  dimensionslose, logarithmische Funktionen oder Konstanten sind,  $\int_1^{\alpha\beta\gamma} \delta$  und  $\int_1^{\delta\beta}$  singuläre Funktionen der Dimension + 1.

Insbesondere hat man:

$$\begin{aligned}
 (1.1.8) \quad & \int_1^{\delta\beta}(z) = (I \delta_r)^\beta \int_1^r(z) \\
 & \int_1^r(z) = -i E_1 \frac{z_r}{z^2}
 \end{aligned}$$

mit  $E_1$  wiederum einer schlimmstenfalls logarithmisch divergenten Funktion. Die  $I$  entspricht der Einheitsmatrix unter Berücksichtigung der inneren Komponenten.

Die r.S. von 1.1.7 ist derart aufgebaut, daß zuerst das lokale Operatorprodukt  $:\bar{\Psi}^\beta \Psi^\delta:(x)$  gebildet und dann das Produkt davon mit  $\Psi^\alpha$ . In dieser Wilsonentwicklung wurden Subtraktionsterme der Art  $\delta_r \partial_r \Psi$  durch Verwendung der Feldgleichung eliminiert. Terme der Art  $\gamma \partial_r \Psi$  sind, wie später gezeigt wird, nach Verallgemeinerung unseres Limesprozesses äquivalent zu  $\gamma \partial_r \Psi$ .

Die r, m, n, p in 1.1.7 sind willkürliche aber feste Parameter, die nach Wilson nicht die Limesbildung beeinträchtigen sollten. Es ist daher bequem

$$(1.1.9) \quad n = m = 0 \qquad r = p = 1$$

zu wählen.

Auf Grund der Antisymmetrie von  $:\psi^\alpha \bar{\psi}^\beta \psi^\gamma:$  (Definition des Produkts) unter dem Wechsel  $\psi^\alpha \leftrightarrow \psi^\gamma$  erhalten wir:

$$(1.1.10) \quad S,^{\alpha\beta\gamma} \delta(\xi) = S,^{\alpha\beta}(\xi) \delta^\gamma \delta \quad \text{und} \quad E_0'(\xi') = 1$$

D.h. unser lokales Produkt erhält die Form:

$$(1.1.11) \quad :\psi^\alpha \bar{\psi}^\beta \psi^\gamma: = \lim_{\xi' \rightarrow 0} \lim_{\xi \rightarrow 0} \{ E_0(\xi) T \psi^\alpha_{(x+\xi')} \bar{\psi}^\beta_{(x)} \psi^\gamma_{(x+\xi)} - S,^{\alpha\beta}(\xi') \psi^\gamma_{(x+\xi)} + S,^{\gamma\beta}(\xi) \psi^\alpha_{(x+\xi')} \}$$

Die Wilson-Entwicklung 1.1.11 kann verallgemeinert werden, indem man asymmetrisches Verhalten unter bestimmten Symmetrietransformationen annehmen würde. Erörterungen dazu siehe<sup>(11)</sup> Sect. 5. DWI.

Wir fordern jetzt die formale Invarianz der Theorie unter infinitesimaler x-abhängiger Parametertransformation, wie sie durch die  $T_a$ , die eine Subalgebra der Generatoren  $T_A$  der konstanten Parametertransformation bilden, erzeugt werden:

$$(1.1.12) \quad \delta_a \psi(x) = \varepsilon^a(x) T_a \psi(x) \quad ; \quad \delta_a \bar{\psi}(x) = \varepsilon^a(x) \bar{\psi}(x) \bar{T}_a$$

mit

$$\bar{T}_a = \gamma^0 T_a^\dagger \gamma^0$$

Gewöhnlich erhält man eine solche lokale Eichinvarianz bei Einführung unabhängiger Vektorfelder für einen jeden Parameter der Transformation. Im folgenden wollen wir zeigen, daß wir in unserer Theorie eine solche lokale Eichinvarianz etablieren können, ohne zusätzliche Eichfelder einzuführen, wenn wir die Wilson'sche "finite-part"-Definition für unser spezielles Modell anwenden und der Faktor  $E_1$  in den Subtraktionstermen zu der Kopplungskonstanten in einem bestimmten Verhältnis steht.

Für die Abänderung des kinetischen Terms in 1.1.1 unter infinitesimaler Eichtransformation hat man:

$$(1.1.13) \quad \delta_a (i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x)) = \varepsilon^a_{, \mu}(x) i \gamma^\mu T_a \psi(x) + \dots$$

mit  $\varepsilon_{,r}^a(x) = \partial_r \varepsilon^a(x)$ . Hier bezeichnet das + ... Terme  $\sim \varepsilon^a(x)$ , welche schon unter der betreffenden konstanten Parametertransformation auftreten.

Für die Abänderung des Operatorprodukts im nichtlinearen Term von 1.1.1 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 (1.1.14) \quad \delta_a : \psi^\alpha \bar{\psi}^\beta \psi^\gamma &= \\
 &= \lim_{\xi' \rightarrow 0} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ E_0(\xi) \left[ \varepsilon^a(x+r\xi') (T_a \psi(x+r\xi'))^\alpha \bar{\psi}^\beta(x+m\xi'+n\xi) \cdot \right. \right. \\
 &\quad \cdot \psi^\gamma(x+m\xi+p\xi) + \varepsilon^a(x+m\xi'+n\xi) \cdot \psi^\alpha(\bar{\psi} \bar{T}_a)^\beta \psi^\gamma + \\
 &\quad + \varepsilon^a(x+m\xi'+p\xi) \psi^\alpha \bar{\psi}^\beta (T_a \psi)^\gamma \left. \right] - \\
 &\quad - \varepsilon^a(x+m\xi') S^{\alpha\beta}((r-m)\xi') (T_a \psi(x+m\xi'))^\gamma + \\
 &\quad + \varepsilon^a(x+r\xi') S^{\beta\gamma}((p-n)\xi') (T_a \psi(x+r\xi'))^\alpha \left. \right\}
 \end{aligned}$$

Wenn wir die Operatorprodukte auf der r.S. durch ihre "finite parts" und ihre singulären Anteile entsprechend 1.1.7 ausdrücken, realisiert man, daß die "finite parts" nur Beiträge  $\sim \varepsilon^a(x)$  liefern.

Wir verifizieren

$$(1.1.15) \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} S_1^{\alpha\beta}(c\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{c} S_1^{\alpha\beta}(\xi)$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
 (1.1.16) \quad \delta_a : \psi^\alpha \bar{\psi}^\beta \psi^\gamma &= \varepsilon_{, \lambda}^a(x) \left\{ \lim_{\xi' \rightarrow 0} \xi'^\lambda S_1^{\mu\kappa}(\xi') \frac{1}{r-m} \cdot \right. \\
 &\quad \cdot \left[ r(T_a \gamma_\mu)^{\alpha\beta} + m(\gamma_\mu \bar{T}_a)^{\alpha\beta} \right] \psi^\gamma - \\
 &\quad - \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^\lambda S_1^{\mu\kappa}(\xi) \frac{1}{p-n} \left[ p(T_a \gamma_\mu)^{\mu\beta} + n(\gamma_\mu \bar{T}_a)^{\mu\beta} \right] \psi_\alpha \left. \right\} + \dots
 \end{aligned}$$

wobei + ... wieder die Anteile  $\sim \mathcal{E}^a(x)$  berücksichtigt, die schon in den entsprechenden konstanten Parametertransformationen auftreten (die Ausführung zu 1.1.6 geht analog wie in 0.6 ff. für das  $R_p$ -Feld gezeigt).

Damit 1.1.16 unabhängig von den Parametern  $r, m, n, p$  ist, muß gelten:

$$(1.1.17) \quad T_a \gamma_r = -\gamma_r \bar{T}_a$$

Für reine innere Symmetriegeneratoren<sup>(x)</sup>

$$(1.1.18) \quad T_a = \bar{T}_a$$

die mit  $\gamma_r$  vertauschen und damit unabhängig von den Raum-Zeitverhältnissen sind, reduziert sich 1.1.7 einfach auf die Antihermitizitätseigenschaft

$$(1.1.19) \quad \bar{T}_a = T_a^\dagger = -T_a$$

Die Bedingung 1.1.17 ist ebenfalls erfüllt für die chirale Transformation

$$(1.1.20) \quad T_a = T_{5a} = \gamma_5 \bar{T}_a$$

mit  $\bar{T}_a$  wiederum ein Anti-Hermiteischer  $\gamma$ -unabhängiger Innerer-Symmetrie-Generator.

Die Variation 1.1.16 des Operatorprodukts hängt immer noch von der speziellen Richtung des Split-Vektors  $\xi^\mu$  oder  $\xi^{\mu'}$  ab. Um Ausdrücke unabhängig von diesen Richtungen zu bekommen, führen wir eine Mittelung über alle Richtungen (Minkowski Mittelung) aus:

$$(1.1.21) \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^\lambda \xi^\mu \Rightarrow \overline{\lim_{\xi \rightarrow 0}} \xi^\lambda \xi^\mu = \frac{1}{4} g^{\lambda\mu} \xi^2$$

---

(x) Wir führen hier den Index "1" für die reine innere Symmetrietransformation ein, um sie von der chiralen  $\gamma_5$ -Transformation "5" zu unterscheiden, wie wir sie später auch verwenden werden.

Diesen gemittelten Limes definieren wir allgemein:

$$(1.1.22) \quad \overline{\lim_{\xi \rightarrow 0}} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 \lim_{\xi(i) \rightarrow 0} ,$$

wobei  $\xi(i)$  vier orthogonale ( $i = 0$  zeitartig;  $i = 1, 2, 3$  raumartig) 4-Vektoren sind (12).

Im folgenden dieses Kapitels wollen wir immer dann, wenn Richtungsabhängigkeit besteht, annehmen, daß in allen "finite part"-Definitionen und i. b. in 1.1.7 der Limes in dieser symmetrischen Weise ausgeführt wird.

Als Konsequenz hat man:

$$(1.1.23) \quad \overline{\lim_{\xi \rightarrow 0}} \xi^\lambda S_\lambda{}^\mu(f) = -\frac{i}{4} E, g^{\lambda\mu}$$

und daher:

$$(1.1.24) \quad \delta_a : \psi^\alpha \bar{\psi}^\beta \psi^\gamma(x) = -\frac{i}{4} E, \varepsilon_{, \mu}^a [ (T_a \gamma^\mu)^{\alpha\beta} \psi^\gamma - (T_a \gamma^\mu)^{\gamma\beta} \psi^\alpha ] + \dots$$

Für den nichtlinearen Term erhalten wir:

$$(1.1.25) \quad \delta_a : O_i^{(1)} \psi (\bar{\psi} O_i^{(2)} \psi) = -\frac{i}{4} E, \varepsilon_{, \mu}^a [ O_i^{(1)} T_a \gamma^\mu O_i^{(2)} \psi - O_i^{(1)} \psi S_p(T_a \gamma^\mu O_i^{(2)}) ] + \dots$$

Gemäß der Invarianz der Feldgleichung unter konstanter Parametertransformation heben sich die Terme + ... in 1.1.13 und 1.1.25 genau weg. Daher kann die Invarianz unter der lokalen Eichtransformation genau dann etabliert werden, wenn die Terme  $\sim \varepsilon_{, \mu}^a$  in 1.1.13 und 1.1.25 sich ebenfalls wegheben. Dies aber führt zu der Invarianz-Bedingung der Feldgleichung unter lokaler Eichtransformation "a":

$$(1.1.26) \quad \gamma^\mu T_a = -\frac{E}{4} [ O_i^{(1)} T_a \gamma^\mu O_i^{(2)} - O_i^{(1)} S_p(T_a \gamma^\mu O_i^{(2)}) ]$$

Diese Bedingung kann erweitert werden, wenn man asymmetrische "Kontraktions"-terme in 1.1.7 zuläßt. (siehe dazu (11) DWI Gl. 3.17).

Wenn der Wechselwirkungsterm in 1.1.1 schon Pierz-symmetrisch geschrieben ist, d.h. wenn gilt:

$$(1.1.27) \quad \frac{1}{2} [ (O_i^{(1)})_{\alpha\beta} (O_i^{(2)})_{\gamma\delta} - (O_i^{(1)})_{\alpha\delta} (O_i^{(2)})_{\gamma\beta} ] = \\ = (O_i^{F(1)})_{\alpha\beta} (O_i^{F(2)})_{\gamma\delta} = - (O_i^{F(1)})_{\alpha\delta} (O_i^{F(2)})_{\gamma\beta}$$

dann sind der erste und zweite Term in 1.1.26 gleich und die Invarianzbedingung erhält eine einfachere Form:

$$(1.1.28) \quad \gamma_\mu T_\alpha = \frac{1}{2} E_i O_i^{F(1)} S_\rho (T_\alpha \gamma^\mu O_i^{F(2)})$$

Man sieht leicht ein, daß die Bedingung 1.1.26 für eine bestimmte lokale Eichtransformation "a" durch eine entsprechende Wahl des einen Regularisierungsfaktors  $E_i$  erfüllt werden kann.  $E_i$  muß dabei eine Konstante sein und kann daher keine logarithmische Abhängigkeit enthalten. Indem man nun diese eine Konstante relativ zur Kopplungskonstanten festlegt, wird man im allgemeinen nicht im Stande sein, lokale Eichinvarianz für mehr als eine Untergruppe der konstanten Parameter-Symmetrie-Gruppe zu erhalten.

Es ist daher sehr interessant, bestimmte Kombinationen  $O_i^{(1)} \times O_i^{(2)}$  der Wechselwirkungsmatrizen herauszufinden, für die die Invarianzbedingung simultan für eine möglichst große Anzahl von Transformationen erfüllt sind. Solch eine Theorie ist dann formal invariant unter allen entsprechenden lokalen Eichtransformationen, ohne daß man dabei zusätzliche Vektorfelder eingeführt hat.

Um den Gehalt dieser lokalen Eichinvarianzbedingungen zu zeigen, schreiben wir die Wechselwirkungsmatrizen in der allgemeinen Form:

$$(1.1.29) \quad O_i^{(1)} \times O_i^{(2)} = \sum_b [ G_{(b)} S + \Pi_{(b)} P + V_{(b)} V + \kappa_{(b)} A + \\ + Q_{(b)} t ] t_b \times t_b$$

mit  $S = I \times I$

$$P = -\gamma_5 \times \gamma_5$$

$$V = \gamma^\mu \times \gamma_\mu$$

$$A = -\gamma_5 \gamma^\mu \times \gamma_5 \gamma_\mu$$

$$T = \gamma^{\mu\nu} \times \gamma_{\mu\nu}$$

$t_b$  sind die inneren Symmetriematrizen, die in  $T_b$  enthalten sind.

Die  $G_{(b)}$ ,  $\pi_{(b)}$ ,  $V_{(b)}$ ,  $\alpha_{(b)}$ ,  $\theta_{(b)}$  sind die Kopplungskonstanten der entsprechenden Wechselwirkung.

Die lokale Eichinvarianzbedingung (1.1.26) heißt damit für reine innere Symmetrietransformation "a" ( $T_a = -i t_a$ )

$$(1.1.30) \quad E_i^{-1} = 2 d V_{(a)}^F$$

und für die  $\gamma_5$ -innere chirale Symmetrietransformation

$$(1.1.31) \quad E_i^{-1} = -2 d \alpha_{(a)}^F$$

Hier ist  $V_{(a)}^F$  die Vektorkopplungskonstante in der Fierz-symmetrischen Form der 4-Fermionen Wechselwirkung

$$(1.1.32) \quad V_{(a)}^F = \frac{1}{2} \left[ V_{(a)} - \frac{1}{4d^2} \sum_b (G_{(b)} + \pi_{(b)} - 2 V_{(b)} + 2 \alpha_{(b)}) \text{Sp}(t_a t_b t_a t_b) \right]$$

und  $\alpha_{(a)}^F$  ist die Axialvektor-Kopplungskonstante in der Fierz-symmetrischen Form

$$(1.1.33) \quad \alpha_{(a)}^F = \frac{1}{2} \left[ \alpha_{(a)} - \frac{1}{4d^2} \sum_b (G_{(b)} + \pi_{(b)} + 2 V_{(b)} - 2 \alpha_{(b)}) \text{Sp}(t_a t_b t_a t_b) \right]$$

Das  $d$  ist dabei die Dimension des inneren Symmetrieraumes, zu dem  $\psi$  gehört:  $d = \text{Sp } I$

Als ein einfaches Beispiel betrachten wir den Fall einer (v-a)-Wechselwirkung von Isospin-Spinoren, die invariant ist unter der  $U_1 \otimes U_1 \otimes SU_2 \otimes SU_2$  chiralen Symmetriegruppe:

$$(1.1.34) \quad i \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = g : [ \gamma^\mu I \psi (\bar{\psi} \gamma_\mu I \psi) - i \gamma^\mu \gamma_5 I \psi (\bar{\psi} i \gamma_\mu \gamma_5 I \psi) ] :$$

wobei das  $I$  eine  $d = 2$ -dimensionale Einheitsmatrix im Isospin ( $= SU_2$ )-Raum darstellt.

Hierfür erhalten wir als Bedingungen der lokalen Eichinvarianz:

$$(1.1.35) \quad E_1^{-1} = g \quad \text{für } SU_2 \otimes SU_2 \quad \text{lokale Eichinvarianz}$$

$$E_1^{-1} = 3g \quad \text{für } U_1 \otimes U_1 \quad \text{lokale Eichinvarianz}$$

Dieses Ergebnis 1.1.35 zeigt an, daß nur der  $SU_2 \otimes SU_2$  oder der  $U_1 \otimes U_1$  Anteil der chiralen Symmetriegruppe als eine lokale Eichgruppe bestehen kann, bei entsprechender Wahl von  $E_1$ . Gl. 1.1.34 entspricht Dürr's paritätssymmetrischer Version (9) von Heisenbergs nichtlinearer Spinortheorie.

Die obigen Überlegungen können unmittelbar verallgemeinert werden auf  $U_n \otimes U_n$  chiral symmetrische Spinortheorien.

Die Tafel I (siehe dazu DWI S. 491) zeigt die Eigenschaft der lokalen Eichinvarianz (indiziert durch den Buchstaben  $g$ ) für die verschiedenen Wechselwirkungsterme.

$$U_{(1)}^3 \otimes U_{(5)}^3 \otimes SU_4 \otimes SU_4$$

$$= \frac{1}{\lambda+1} [v-a] I \times I$$

$$= \frac{1}{2(\lambda+1)} [v-a] [I \times I + \frac{1}{2} \sum_a t_a \times t_a]$$

$$U_{(5)}^3 \otimes U_{(5)}^3 \otimes SU_4^3 \otimes SU_4^3$$

$$= -\frac{1}{2} [s+p] \sum_a t_a \times t_a + v [I \times I + \frac{1}{2} \sum_a (v-a) \sum_a t_a \times t_a]$$

$$U_{(5)}^3 \otimes U_{(5)}^3 \otimes SU_4^3 \otimes SU_4^3$$

$$= -2a I \times I$$

$$= \frac{1}{2} [s+p] \sum_a t_a \times t_a - a [I \times I + \frac{1}{2} \sum_a (v-a) \sum_a t_a \times t_a]$$

$$U_{(5)}^3 \otimes U_{(5)}^3 \otimes SU_4^3 \otimes SU_4^3$$

$$[ (1+x) v \dots (1-x) a ] I \times I \quad x = \text{beliebig} \neq \pm 1$$

$$= \frac{1}{2} [v-a] [I \times I + \frac{1}{2} \sum_a t_a \times t_a] - x [ (s+p) \sum_a t_a \times t_a ] - x [ (s+p) \frac{1}{2} \sum_a t_a \times t_a - \frac{1}{2} [v-a] I \times I ]$$

$$U_{(5)}^3 \otimes U_{(5)}^3 \otimes SU_4^3$$

$$2 \{ x v - (1-x) [ (s+p) + \frac{1}{2} (v+a) ] \} I \times I \quad x = \text{beliebig} \neq 1$$

$$= - [ (s+p) ] [ I \times I - \frac{2}{\lambda+1} \sum_a t_a \times t_a - (v+a) \frac{1}{2} [ I \times I - \frac{1}{2} \sum_a t_a \times t_a ] ]$$

$$+ x [ (s+p) ] [ I \times I - \frac{1}{2} (\frac{2}{\lambda+1} + 1) \sum_a t_a \times t_a ] + (1+\frac{1}{2}) v [ I \times I + \frac{1}{2} a [ I \times I - \sum_a t_a \times t_a ] ]$$

$$U_{(5)}^3 \otimes SU_4^3$$

$$[ \zeta_0 s + \pi_0 p - [ 2 + \frac{1}{2} (\zeta_0 + \pi_0) ] a + \theta_1 t ] I \times I$$

## 1. § 2. Vergleich unserer lokaleichinvarianten Spinortheorie mit konventionellen Eichtheorien

Der beste Weg, die vorliegende Theorie mit den konventionellen lokaleichinvarianten Theorien (6)(7) zu vergleichen, ist es, sie in der Fierz-symmetrischen Form zu schreiben

$$(1.2.1) \quad i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = : O_i^{(1)F} \psi (\bar{\psi} O_i^{(2)F} \psi) :$$

Unter einer infinitesimalen lokalen reinen Innere-Symmetrie Eichtransformation mit den Generatoren

$$(1.2.2) \quad T_a = \bar{T}_a = -i u_{(a)} t_{1a} \quad \text{haben wir :}$$

$$\begin{aligned} (1.2.3) \quad \delta_{1a} : \psi^{(1)F} \gamma^\mu t_{1a} \psi (\bar{\psi} \gamma_\mu t_{1a} \psi) &:= \\ &= \frac{\psi^{(1)F}}{e} u_{(a)} \gamma^\mu t_{1a} \varepsilon^{1a}_{,\mu} \psi + \varepsilon^{1a}_{,\mu} T_{\mu m} = \\ &= \varepsilon^{1a}_{,\mu} \frac{\psi^{(2)F}}{e} i \gamma^\mu T_{1a} \psi + \varepsilon^{1a}_{,\mu} \text{-Term} \end{aligned}$$

$$(1.2.4) \quad \delta_{1a} : O_i^{(1)F} \psi (\bar{\psi} O_i^{(2)F} \psi) := 0 + \varepsilon^{1a}_{,\mu} \text{-Term}$$

$$(1.2.5) \quad \delta_{1a} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \varepsilon^{1a}_{,\mu} i \gamma^\mu T_{1a} \psi + \varepsilon^{1a}_{,\mu} \text{-Term}$$

Die Relation 1.2.4 enthält alle Wechselwirkungsterme  $O_i^{(1)F} \times O_i^{(2)F}$  ausgenommen den Vektor-Kopplungsterm der inneren Symmetrie "a", wie er in 1.2.3 dargestellt ist.

Wir führen die "Ladung" ein:

$$(1.2.6) \quad \mathcal{L} = (2 E, d)^{-1}$$

und sehen damit, daß die lokale Eichtransformation "1a" eine Symmetrietransformation ist, wenn die Vektorkopplungskonstante gleich dieser Ladung ist:

$$(1.2.7) \quad v_a^F = e$$

Dies ist gerade Bedingung 1.1.30.

Die Terme  $\varepsilon^{1a}$  auf der r.S. heben sich in der Gleichung gegenseitig weg, wegen der Invarianz von 1.2.1 unter der konstanten Parameter Transformation.

Die Gleichungen 1.2.3 - 1.2.5 müssen verglichen werden mit der Situation in konventionellen Theorien, in denen für jede Innere-Symmetrie Transformation "1a" ein Vektorfeld  $A_\mu^{1a}$  zusätzlich eingeführt werden muß, um die entsprechende lokale Eichsymmetrie zu etablieren.

Die infinitesimalen lokalen Eichtransformationen liefern in diesen Theorien (6)(7):

$$(1.2.8) \quad \delta_{1a} [e_{(1a)} \gamma^\mu n_{(a)} t_a \psi A_\mu^{1a}] = \varepsilon^{1a}{}_{,\mu} i \gamma^\mu T_{1a} \psi + \varepsilon^{1a} \text{-Terme}$$

$$(1.2.9) \quad \delta_{1a} \quad (\text{andere Wechselwirkungen}) = \sigma + \varepsilon^{1a} \text{-Terme}$$

$$(1.2.10) \quad \delta_{1a} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \varepsilon^{1a}{}_{,\mu} i \gamma^\mu T_{1a} \psi + \varepsilon^{1a} \text{-Terme}$$

Daraus ersehen wir, daß in den Spinortheorien die "composites": im wesentlichen die Rolle der Vektorfelder  $A_\mu^{1a}$  übernehmen.

Wir definieren:

$$(1.2.11) \quad \bar{\psi}^\beta \psi^\gamma(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} E_0(\xi) \bar{\psi}^\beta(x - \frac{\xi}{2}) \psi^\gamma(x + \frac{\xi}{2}) + \int_1 \delta_1^\beta(\xi)$$

mit  $\int_1 \delta_1^\beta(\xi)$  definiert wie in 1.1.8.

Insbesondere konstruieren wir nun die Vektoroperatoren:

$$(1.2.12) \quad A_{\mu}^{1b} := \frac{1}{n_{(b)}} : \bar{\Psi} \gamma_{\mu} t_b \Psi : \\ = \frac{1}{n_{(b)}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ E_0(\xi) \bar{\Psi}(x - \frac{\xi}{2}) \gamma_{\mu} t_b \Psi(x + \frac{\xi}{2}) - 2i \varepsilon^{-1} \frac{\xi_{\mu}}{2} \delta_{1b,1} \right\}$$

Dies zeigt, daß die Operatoren:  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \bar{\Psi} \gamma_{\mu} t_b \Psi$  im lokalen Limes nicht singular sind, ausgenommen für  $t_b = 1$ .

Wenn man die lokalen (1a)-Eichtransformationen betrachtet, so erhält nur das Vektorfeld  $A_{\mu}^{1a}$  I-Beiträge, die den inhomogenen Teil produzieren.

Insbesondere:

$$(1.2.13) \quad \delta_{1a} A_{\mu}^{1b} = \frac{1}{2} \varepsilon^{1a}{}_{,\mu} \varepsilon^{-1} \delta_{1a,1b} - \varepsilon^{1a} \sum_c f_{1a,1b}^c A_{\mu}^c$$

wobei wir verwendet haben:

$$(1.2.14) \quad [T_a, t_b] = \sum_c f_{ab}^c t_c$$

Die Beziehung 1.2.13 muß verglichen werden mit der gewöhnlichen Bedingung:

$$(1.2.15) \quad \delta_{1a} A_{\mu}^{1b} = \varepsilon^{1a}{}_{,\mu} \varepsilon^{-1} \delta_{1a,1b} - \varepsilon^{1a} \sum_c f_{1a,1b}^c A_{\mu}^c$$

Der einzige Unterschied zwischen 1.2.13 und 1.2.15 ist der, daß die inhomogenen Terme in 1.2.13 mit dem halben Wert von dem in 1.2.15 auftreten. Dies hängt mit dem Umstand zusammen, daß die andere Hälfte des inhomogenen Termes in der Feldgleichung durch die Konstruktion des "finite-part" :  $\Psi^a A_{\mu}^{1a}$  : aus den lokalen Operatoren  $\Psi^a(x)$  und  $A_{\mu}^{1a}(x)$  erzeugt wird.

$$(1.2.16) \quad : \Psi^a A_{\mu}^{1a} : (x) = \overline{\lim_{\xi' \rightarrow 0}} \left[ E_0'(\xi') \Psi^a(x + \frac{\xi'}{2}) A_{\mu}^{1a}(x - \frac{\xi'}{2}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{n_{(a)}} (\delta_{1a}(\xi') \gamma_{\mu} t_a \Psi(x - \frac{\xi'}{2}))^a \right]$$

wobei die singuläre Matrix  $S_i^{\alpha\beta}(\psi')$  wieder durch 1.1.8 gegeben ist. Dieser Unterschied 1.2.13 zu 1.2.15 läßt sich auf einfache Weise durch eine Umdefinition der "finite-part"-Vorschrift in  $:\psi^\alpha A^{\alpha a}:$  beheben (s. siehe dazu I. § 3).

Wenn wir die Definitionen 1.2.12 und 1.2.16 kombinieren erhalten wir den finite part von 1.1.7 des 3-Spinor-Produktes unter Einfügung der Matrix  $(1/\kappa_a)$   $\cdot \gamma_r t_a$  und der speziellen Wahl  $r=p=1/2$ ,  $m=n=-1/2$ . Entsprechend unserer früheren Überlegung 1.1.10 müssen wir wieder wählen

$$(1.2.17) \quad E_o'(\psi') = 1$$

Die hier ausgeführten Überlegungen können unmittelbar auf die chiralen Transformationen  $T_a = T_{5a} = -i \kappa_a \gamma_5 t_a$  ausgeweitet werden.

Die relevanten Spinorkombinationen sind dabei die Axialvektorfelder:

$$(1.2.18) \quad A_r^{sb} := \frac{1}{\kappa(b)} : \bar{\psi} \gamma_r \gamma_5 t_b \psi :$$

Die Definitionen 1.2.12 und 1.2.18 können in der allgemeinen Form zusammengefaßt werden:

$$(1.2.19) \quad A_r^b := \frac{i}{\kappa(b)} : \bar{\psi} \gamma_r T_b \psi :$$

Sie transformieren sich unter der (chiralen oder nichtchiralen) Transformation "a" als:

$$(1.2.20) \quad \delta_a A_r^b = \frac{1}{2} \varepsilon_a^c e^{-1} \delta_{ab} - \varepsilon_a^c \sum_c f_{ab}^c A_r^c$$

Die Bedingung der lokalen Eichsymmetrie der Feldgleichung unter den Transformationen "a" lautet:

$$(1.2.21) \quad \mathcal{L}_{(a)} = 0$$

wobei wir in das  $\mathcal{L}_{(a)}$  die Vektor- und Axialvektor-Kopplungskonstante kombiniert haben:

$$(1.2.22) \quad \mathcal{L}_a = \begin{cases} \mathcal{L}_{(1a)} = \gamma_a^F \\ \mathcal{L}_{(5a)} = -\alpha_a^F \end{cases}$$

Das negative Vorzeichen bei der Axialvektorkopplungskonstanten hängt zusammen mit dem negativen Vorzeichen in der Definition 1.2.21 der Axialvektorkopplung. Die Bedingung 1.2.21 entspricht 1.1.30 bzw. 1.1.31.

Eine wirkliche Invarianz der Theorie kann jedoch nur dann gezeigt werden, wenn man über diese "formale" Invarianz der Feldgleichung hinaus nachweist, daß lokale Substitutionstransformationen als unitäre Transformationen in einem Zustandsraum implementiert werden können. Das führt auf die Konstruktion der Ströme, und damit auf ein ganz neues Feld der Betrachtung, welches wir in den folgenden beiden Kapiteln erschließen wollen.

### I. § 3. Die lokale Eichinvarianz an Hand des Beispiels der zwei-komponentigen Spinortheorie

Vorher noch wollen wir als ein Beispiel einige Punkte dieser Sektionen I. § 1. I. § 2 an einem besonders einfachen Modell, dem zwei-komponentigen Spinormodell kurz ausführen, und zwar deshalb, weil wir in den folgenden Kapiteln die Untersuchungen an diesem algebraisch besonders einfachen Modell durchführen werden.

Für ein zwei-komponentiges Weyls spinorfeld existiert nur eine mögliche Lorentz-invariante Feldgleichung ohne Ableitungskopplung, nämlich:

$$(1.3.1) \quad i \sigma^\mu \partial_\mu \psi(x) + g : \sigma^\mu \psi (\psi^\dagger \sigma_\mu \psi) : (x) = 0$$

da höhere Produkte in  $\psi$  wegen der Antisymmetrie des  $\psi$ -Operators verschwinden. Die Gleichung ist invariant unter der Skalentransformation

$$(1.3.2) \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \eta^{-\frac{1}{2}} \psi(\eta^{-1}x)$$

sowie der Phasentransformation:

$$(1.3.3) \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp[-i\epsilon] \psi(x)$$

Wir definieren in diesem Paragraphen den nichtlinearen Term in 1.3.1 als:

$$(1.3.4) \quad \begin{aligned} -i \sigma^\mu : \psi (\psi^\dagger \sigma_\mu \psi) : (x) &= \sigma^\mu : \psi R_\mu : (x) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\xi' \rightarrow 0} \left\{ T \sigma^\mu \psi(x+\xi') R_\mu(x) - i \frac{\epsilon}{4\pi^2} \frac{\xi'^\nu}{(\xi'^2 - i0)} \sigma^\nu \psi(x) \right\} \end{aligned}$$

mit dem "rechtschiralen" Vektorfeld

$$(1.3.5) \quad R_{\mu}(x) = -i \psi^{\dagger} \delta_{\mu} \psi(x) = \\ = -\lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ E_0(\xi) T \psi^{\dagger}(x - \frac{\xi}{2}) \delta_{\mu} \psi(x + \frac{\xi}{2}) + i \frac{E}{4\pi^2} \frac{\xi_{\mu}}{\xi^2 - i0} \right\}$$

(Beachte hierbei das - Zeichen in der Definition von  $R_{\mu}(x)$  im Vergleich zu 1.2.12).

Damit kann die Feldgleichung 1.3.1 auch als

$$(1.3.6) \quad i \sigma^{\mu} : (\partial_{\mu} + i g R_{\mu}) \psi(x) = 0$$

geschrieben werden.

Mit der "finite-part" Definition 1.3.4 genügen wir einem Hinweis auf S. 22, um so den Vergleich mit "konventionellen" Eichtheorien durchsichtiger zu machen. Die "finite-part"-Definition 1.3.4 unterscheidet sich von der in 1.2.16 um einen Faktor 1/2 auf der r.S. 1.3.4, mit dem das point-split Operatorprodukt zu seinem "finite-part" verknüpft wird.

Man zeigt analog wie in den vorangegangenen Paragraphen dieses Kapitels, daß die Feldgleichung 1.3.1 oder 1.3.6 invariant unter der lokalen Eichtransformation

$$(1.3.7) \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp[-i \varepsilon(x)] \psi(x) \quad \text{ist,}$$

$$(1.3.8) \quad \text{wenn wir } g \cdot E = 16 \pi^2 \quad \text{wählen.}$$

Es gilt unter 1.3.7

$$(1.3.9) \quad \delta^{\mu} : \psi R_{\mu} : \rightarrow \exp[-i \varepsilon(x)] \delta^{\mu} [ : \psi R_{\mu} : + \frac{E}{16\pi^2} \varepsilon_{,\mu} \psi ]$$

Das Vektorfeld 1.3.5 transformiert sich inhomogen, und zwar

$$(1.3.10) \quad R_{\mu}(x) \rightarrow R'_{\mu}(x) + \frac{E}{16\pi^2} \varepsilon_{,\mu}(x) = R_{\mu}(x) + \frac{1}{g} \varepsilon_{,\mu}(x)$$

d.h. ein Transformationsverhalten genau wie im "konventionellen" Fall, aber bezüglich des inhomogenen Termes um einen Faktor 2 verschieden von 1.2.13. Diese Abänderung rührt von der legitimen Umdefinition 1.3.4 gegenüber 1.2.16. her.

Die Bedingung 1.3.8 entspricht der Bedingung 1.1.30

$$(1.3.11) \quad 2 d E, v_{a1}^F = 1$$

für den speziellen Fall  $d = 1/2$  (2-komponentige Theorie), und

$$(1.3.12) \quad v_{a1}^F = -\frac{g}{2}, \quad E_1 = -\frac{E}{8\pi^2}$$

(Hierbei muß man das negative Vorzeichen in der Definition 1.3.5 von  $R_F$  berücksichtigen).

## Kapitel II: Konstruktion von lokal-eichinvarianten Größen in unserer Theorie und seine Eigenschaften i.b. unter Berücksichtigung der Feldgleichung

### II. § 1. Konstruktion der lokal-eichinvarianten Größen

Wir untersuchen in diesem Kapitel mit der Wilsonhypothese sowie dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz das Produkt zweier abstrakter Spinorfelder bei kleinen Abständen bzw. in der Nähe des Lichtkegels. Wir erinnern dabei an das eingangs genannte Aufbauprinzip, nach welchem das abstrakte Feld  $\Psi(x)$  als Aufbaublock aller anderen Felder dient. Wir nennen es daher Konstituendenfeld. Nun, gerade in der Produktbildung zweier dieser Konstituendenfelder erhält unser einheitliches Aufbauprinzip eine hervorragende Rolle.

Um die algebraische Struktur möglichst unkompliziert zu halten und um das wesentliche durchsichtig zu machen, betrachten wir in diesem Kapitel die bereits in I. §3 angegebene zwei-Komponenten Theorie und fordern lokale  $U_1$ -Invarianz. Die Struktur der  $\Psi\bar{\Psi}$ -Operatorprodukte wird klar, wenn wir zusätzlich zur Anwendung der Wilsonhypothese vollen Gebrauch von den Transformationseigenschaften sowie der Raum- und Zeit-Reflektion machen.

Im ersten Schritt zeigen wir, daß das Spinoroperatorprodukt formal zu schreiben ist als:

$$(2.1.1) \quad R^k(x; \eta) \equiv - E_0(\eta) \Psi^*(x - \frac{\eta}{2}) \sigma^k \Psi(x + \frac{\eta}{2}) = : I^k E : (x; \eta)$$

mit

$$(2.1.2) \quad E(x; \eta) \equiv : \exp \left\{ -i \int_{x-\frac{\eta}{2}}^{x+\frac{\eta}{2}} R_\mu(z) dz^\mu \right\} : = E^*(x; \eta)$$

$$\text{mit} \quad R_\mu(x) = - : \Psi^* \sigma_\mu \Psi : (x) = - \lim_{\eta \rightarrow 0} \left\{ E_0(\eta) \Psi^*(x - \frac{\eta}{2}) \sigma_\mu \Psi(x + \frac{\eta}{2}) + 2i \int_{\frac{\eta}{2}}^{\frac{\eta}{2}} I \right\}$$

wobei die Integration entlang eines beliebigen Pfades zwischen den Endpunkten ausgeführt wird.

Das  $I_\mu(x; \eta)$  ist ein lokal-eichinvarianter endlicher Vektoroperator der Dimension 1, mit der Eigenschaft:

$$(2.1.3) \quad I^r(x; \xi) = I^r(x; -\xi)$$

Die rechte Seite von 2.1.1 besteht aus einer unendlichen Entwicklung in Termen von  $\xi$ , die auch positive Potenzen in  $\xi$  enthält. Die Bedeutung dieser positiven Potenzen in  $\xi$  für die Lichtkegelentwicklung  $\xi^2 \rightarrow 0$ , sowie für die Konstruktion von eichinvarianten Observablen mittels innerer Ableitung aus dem zweier- $\Psi$ -Produkt ist evident.

Die rechte Seite von 2.1.1 transformiert sich unter lokaler  $U_1$ -Eichtransformation wie:

$$(2.1.4) \quad : I^r \mathcal{E} : (x; \xi) \rightarrow : I^r \mathcal{E} : (x; \xi) \exp \left[ -i \int_{x-\frac{\xi}{2}}^{x+\frac{\xi}{2}} \mathcal{E}_{,r}(z) dz^r \right] \\ = : I^r \mathcal{E} : (x; \xi) \exp \left[ -i \mathcal{E} \alpha + \frac{1}{2} + i \mathcal{E} (x - \frac{\xi}{2}) \right]$$

welches genau das Transformationsverhalten der linken Seite von 2.1.1 ist. Bei der Herleitung von 2.1.4 ist Gebrauch davon gemacht worden, den "finite part" von R-Operatorprodukten derart zu definieren, daß diese Produkte das konventionelle Eichverhalten haben (siehe dazu sowie zu weiteren Einzelheiten: (13) DWII, 2.17).

Der Ausdruck:  $I^r \mathcal{E}$ : enthält endliche Produkte gebildet aus den Operatoren sowie den "inneren" Ableitungsoperatoren:

$$(2.1.5) \quad R_{\mu, \lambda_1 \dots \lambda_r} = - : \psi^\dagger \sigma_\mu \left( \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\lambda_1} \right) \dots \left( \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\lambda_r} \right) \psi : (x) \\ = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ (i \partial_{\lambda_1}) \dots (i \partial_{\lambda_r}) R_\mu(x; \xi) \right\}$$

sowie Ableitungen auf diese Operatoren:

$$(2.1.7) \quad \partial_\nu R_\mu \equiv R_{\mu, \nu} ; R_{\mu, \nu, \lambda} ; R_{\mu, \nu, \lambda, \dots} ; R_{\mu, \nu, \lambda, \dots, \nu} ; R_{\mu, \lambda, \nu, \dots}$$

Alle genannten Operatoren sind also formal aus den Vektoren  $R$ ,  $\partial$  und  $\vec{\partial}$  konstruiert. Diese Vektoren sind kontrahiert mit einer bestimmten Anzahl von  $\xi$ -Vektoren sowie dem antisymmetrischen Levi-Civita-Tensor, um so alles in allem den Vektoroperator  $R^T(x; \xi)$  aus 2.1.1 aufzubauen. Siehe zu ähnlichen Entwicklungen (14).

$$(2.1.8) \quad R^T(x; \xi) = f^T(\partial, \vec{\partial}, R(x); \xi; \varepsilon)$$

Unter Paulis starker Reflektion:

$$(2.1.9) \quad \begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi(-x) \\ \psi^*(x) &\rightarrow \psi^*(-x) \end{aligned}$$

wobei die Folge des Operatorprodukts umgekehrt wird, erhalten wir einerseits auf Grund der Definition 2.1.2

$$(2.1.10) \quad R^T(x; \xi) \rightarrow -R^T(-x; -\xi)$$

wobei man Gebrauch von der Antisymmetrie des T-Produkts macht, sowie andererseits:

$$(2.1.11) \quad f^T(\partial, \vec{\partial}, R(x); \xi; \varepsilon) \rightarrow f_{\text{rev}}^T(\partial, \vec{\partial}, -R(-x); \xi; \varepsilon)$$

wobei der Index "rev" die umgekehrte Ordnung der Produkte  $R_\mu$ ,  $R_{\mu\lambda}$ , ... etc. angibt.

Kombiniert man 2.1.10 mit 2.1.11 so erhält man die Bedingung:

$$(2.1.12) \quad f^T(\partial, \vec{\partial}, R(x); \xi; \varepsilon) = -f_{\text{rev}}^T(-\partial, -\vec{\partial}, -R(x); -\xi; \varepsilon)$$

Da man immer eine ungerade Anzahl von Vektoren braucht, um wieder Vektoren zu erhalten, ist diese Bedingung erfüllt, wenn gilt:

$$(2.1.13) \quad f^r(\partial, \vec{\partial}, R(x); i\xi; \varepsilon) = f^r_{rev}(\partial, \vec{\partial}, R(x); i\xi, \varepsilon)$$

Aus der Transformation unter Hermitescher Konjugation

$$(2.1.14) \quad R^r(x; \xi) \rightarrow R^r(x; -\xi)$$

$$(2.1.15) \quad f^r(\partial, \vec{\partial}, R; i\xi; \varepsilon) \rightarrow f^{r*}(\partial, \vec{\partial}, R; i\xi; \varepsilon)$$

folgt in Verbindung mit 2.1.13, daß  $f^r$  eine reelle Funktion ist.

Unter Wigners Zeitumkehr:

$$(2.1.16) \quad \begin{cases} \psi(x) \rightarrow C \psi(x) \\ \psi^*(x) \rightarrow \psi^*(x) C^* \\ C \rightarrow C^* \end{cases} \quad r = \begin{cases} -1 & \text{zeitartig} \\ 1 & \text{raumartig} \end{cases}$$

erhält man entsprechend die Bedingung

$$(2.1.17) \quad f^r(\partial, \vec{\partial}, R(x); i\xi; \varepsilon) = f^r(-\partial, \vec{\partial}, R(x); i\xi; -\varepsilon)$$

welche z.B. beinhaltet, daß eine ungerade Anzahl von Ableitungen  $\partial$  nur in Kombination mit dem  $\varepsilon$ -Tensor auftritt.

Man sieht nun leicht, daß  $f^r$  die Realitätsbedingung sowie die Bedingung 2.1.17 erfüllt, wenn die Operatorfunktion  $I^r$  selbst diese Bedingungen erfüllt.

Es gilt deshalb der Ansatz:

$$(2.1.18) \quad I^r_\mu(x; \xi) = \psi \frac{(-i)^{\frac{\mu}{2}}}{\xi^{\frac{\mu}{2}}} + (-i) \xi_\lambda R_{\mu\lambda} + \frac{(-i)^2}{2!} \xi_\lambda \xi_\kappa R_{\mu\lambda\kappa} + \\ + \frac{(-i)^3}{3!} \xi_\lambda \xi_\kappa \xi_\tau R_{\mu\lambda\kappa\tau} + \dots$$

mit  $R_{\mu\lambda\dots\lambda r}(x)$  definiert wie in 2.1.5.

Diese Operatoren können weiterhin in ihre Lorentz-irreduziblen Komponenten zerlegt werden, die dann Operatoren festgelegten Twists sind. Dabei ist der Twist definiert als Differenz zwischen der Dimension und dem Rang des Tensors.

Bei der Entwicklung der  $\xi$ -Differentiation  $\partial_\xi$  in 2.1.5 ist es wichtig festzustellen, daß die möglicherweise logarithmische Funktion  $E_0(\xi)$  sich effektiv wie eine Konstante verhält, in dem Sinne als die  $\xi$ -Ableitungen auf diese Funktion immer schneller als wie der konkurrierende Term zu Null geht:

$$(2.1.19) \quad \partial_\xi^k E_0(\xi) C(\xi) = E_0(\partial_\mu C) \left[ 1 + \frac{\partial_\mu (\ln E_0)}{\partial_\mu (\ln C)} \right]$$

wobei  $C(\xi)$  eine bestimmte Potenz von  $\xi$  entsprechend seiner Längendimension  $n(n \neq 0)$  ist:

$$\ln C = \frac{n}{2} \ln(\xi^2)$$

Damit haben wir :

$$(2.1.20) \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\partial_\mu (\ln E_0)}{\partial_\mu (\ln C)} = \frac{2}{n} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\ln E_0}{\ln \xi^2} = 0 \quad \text{für } n \neq 0$$

Mit 2.1.18 und 2.1.5 ist der volle Ausdruck für die eichinvarianten Operatoren  $R_{\mu\lambda\dots\lambda r}(x)$  gegeben.

Zur Darstellung von  $R^{\mu\kappa}$  siehe DWII, 5.31.

Wir geben hier als ein Beispiel den expliziten Ausdruck für  $R_{\mu\kappa}^{\mu\kappa}(x)$  an:

$$(2.1.21) \quad \begin{aligned} R^{\mu\kappa}_{\mu\kappa}(x) &\equiv \frac{1}{4} : \psi^\dagger \sigma^{\mu\kappa} \partial_\mu \partial_\kappa \psi : \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4} E_0 \psi^\dagger \sigma^{\mu\kappa} \partial_\mu \partial_\kappa \psi + i h_3^{\mu\kappa} I - h_2^{\mu\kappa} R_0 - \right. \\ &\quad \left. - i h_1^{\mu(\sigma\tau)} : R_\sigma R_\tau : - h_0^{\mu(\sigma\tau\lambda)} : R_\sigma R_\tau R_\lambda : - \right. \\ &\quad \left. - h_0'^{\mu(\sigma\tau)\lambda} R_{\lambda\sigma\tau} - : R^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} : \right\} \end{aligned}$$

mit :

$$h_3^{\mu} = 16 \frac{\xi^{\mu}}{(\xi^2)^2}$$

$$h_2^{\mu\sigma} = 8 \left[ g \frac{\xi^{\mu\sigma}}{\xi^2} - 4 \frac{\xi^{\mu} \xi^{\sigma}}{(\xi^2)^2} \right]$$

$$h_1^{\mu(\sigma\tau)} = 12 \left[ g \frac{\xi^{\mu(\sigma} \xi^{\tau)}}{\xi^2} - 2 \frac{\xi^{\mu} \xi^{\sigma} \xi^{\tau}}{(\xi^2)^2} \right]$$

$$h_0^{\mu(\sigma\tau\lambda)} = \frac{4}{3} \left[ 3 g \frac{\xi^{\mu(\sigma} \xi^{\tau} \xi^{\lambda)}}{\xi^2} - 4 \frac{\xi^{\mu} \xi^{\sigma} \xi^{\tau} \xi^{\lambda}}{(\xi^2)^2} \right]$$

$$h_0'^{\mu(\sigma\tau\lambda)} = -\frac{2}{3} \left[ 3 g \frac{\xi^{\mu(\sigma} \xi^{\tau} \xi^{\lambda)}}{\xi^2} - 4 \frac{\xi^{\mu} \xi^{\sigma} \xi^{\tau} \xi^{\lambda}}{(\xi^2)^2} \right]$$

Für das folgende, wenn wir versuchen, Bedingungen zu finden, die von der Feldgleichung 1.3.1 in der 2-Komponentenform:

$$(2.1.22) \quad i \sigma^{\mu} \partial_{\mu} \psi(x) + g : \sigma_{\mu} \psi (\psi^* \sigma^{\mu} \psi) : = 0$$

an die  $I_{\mu}(x; \xi)$  - Entwicklung gestellt werden, benötigen wir natürlich auch Operatorentwicklungen für  $\psi^*(\psi R)$  und  $(R \psi^*) \psi$ .

Wir setzen an:

$$(2.1.23) \quad B_{\mu R}(x; \xi) \equiv -E_0 \psi^* \sigma_{\mu} \psi R_{\mu} \equiv [I_{\mu R} + I_{\mu} R_{\mu}] \xi : (x; \xi)$$

$$(2.1.24) \quad \bar{B}_{\mu R}(x; \xi) \equiv -E_0 R_{\mu} \psi^* \sigma_{\mu} \psi \equiv [\bar{I}_{\mu R} + I_{\mu} R_{\mu}] \xi : (x; \xi)$$

wobei  $I_{\mu}$  die Operatorfunktion ist, wie sie in 2.1.18 definiert ist, und  $I_{\mu R}$ ,  $\bar{I}_{\mu R}$  lokal eichinvariante Operatoren der Dimension 2. Die  $R_{\mu}(x)$  sind formale Entwicklungen von  $(\pm)$

$$R_{\mu}(x \pm \frac{1}{2})$$

an der Stelle  $x$ , insbesondere:

$$(2.1.25) \quad R_{\left(\frac{1}{2}\right)\mu}(x) = \exp \left[ \pm \left( \left( \frac{1}{2} \right) \partial \right) \right] R_{\mu}(x) \equiv \left[ 1 \pm \frac{1}{2} (\partial) + \frac{1}{8} (\partial)^2 \pm \dots \right] R_{\mu}(x)$$

Man sieht dabei sofort, daß die linke Seite von 2.1.23 und 2.1.24 sich unter lokaler Eichtransformation genau wie ihre rechten Seiten transformieren. Die Funktionen  $I_{\mu\mu}$  und  $\bar{I}_{\mu\mu}$  enthalten beide  $4\psi$ -Produkte.

Insbesondere können wir nicht mit entsprechenden einfachen gruppentheoretischen Überlegungen ein Ergebnis derart herleiten, daß  $I_{\mu\mu}$  und  $\bar{I}_{\mu\mu}$  eine ähnliche Struktur wie  $I_{\mu}$  haben, d.h. wir wissen nichts über die Differenz  $I_{\mu\mu} - \bar{I}_{\mu\mu}$ , wenn wir nicht Kenntnis über das  $4\psi$ -Produkt haben.

## II. § 2: Bedingungen der Feldgleichung an die lokal-eichinvarianten Größen

Nehmen wir nun einmal an, daß die  $\Psi(x)$ -Felder der Feldgleichung 2.1.22 genügen.

Wir wissen zudem, daß in 2.1.1 der  $I_P(x, \cdot)$ -Vektor lokal-eichinvariante Operatoren beliebiger Dimension enthält, nämlich 2.1.5. Insbesondere vermuten wir, daß darin auch die Ströme der Dimension 3 und der Energieimpulstensor der Dimension 4 enthalten sind. Wir fragen also, kann man mit Hilfe der Feldgleichung 2.1.22 die Erhaltung von Strömen bzw. Energieimpulstensor nachweisen, bzw. kann man solche Anteile aus dem  $I_P(x, \cdot)$  mit der richtigen Strom- bzw. Energieimpulstensordimension, identifizieren, so daß ihre Divergenz verschwindet, und sie somit als Kandidat für den Strom oder Energieimpulstensor in Frage kommen?

Wir beantworten diese Frage allgemein, indem wir mit Hilfe der Feldgleichung Bedingungen für  $I_P \mathcal{E}$  sowie für  $I_P$  allein herleiten und damit Bedingungen der Feldgleichungen als Korrelationen der Operatoren aus der  $I_P$ -Entwicklung untereinander aufstellen.

Wir verwenden die Feldgleichung in der Form<sup>(x)</sup>

$$(2.2.1) \quad \Psi,^\mu = -\sigma^{\{\mu\nu\}} \Psi_{,\nu} - ig \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu : \Psi R_\nu :$$

$$(2.2.2) \quad \Psi^*,^\mu = \Psi^*_{,\nu} \bar{\sigma}^{\{\mu\nu\}} + ig : R_\nu \Psi^* : \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu :$$

Und damit

$$(2.2.3) \quad \partial^\mu E_0 \Psi^* \sigma^\mu \Psi = - [ \Psi^* \sigma^\mu \bar{\sigma}^{\{\mu\nu\}} \Psi_{,\nu} - \Psi^*_{,\nu} \bar{\sigma}^{\{\mu\nu\}} \sigma^\mu \Psi ] - \\ - ig [ \Psi^* \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu : \Psi R_\nu : - : R_\nu \Psi^* : \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu \sigma^\mu \Psi ] ,$$

---


$$(x) \quad \sigma^{\mu\nu} = \bar{\sigma}^{\{\mu\nu\}} , \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} = \sigma^{\{\mu\nu\}}$$

$$(2.2.4) \quad E_0 \psi^* \sigma^{\mu\nu} \partial^\rho \psi = -[\psi^* \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\tau} \psi]_{,\nu} + \psi^*_{,\nu} \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\tau} \psi - \\ - i g [\psi^* \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\tau} \psi : \psi R_\nu : + : R_\nu \psi : \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\tau} \psi]$$

Mit

$$(2.2.5) \quad \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\rho\tau} = [-i \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} + g^{\mu\rho} g^{\nu\tau}] \sigma_\tau$$

$$g^{\mu\nu} g^{\rho\tau} = g^{\mu\rho} g^{\nu\tau} + g^{\mu\tau} g^{\nu\rho} - g^{\mu\tau} g^{\nu\rho}$$

sowie den Definitionen 2.1.1, 2.1.23 und, 2.1.24 kann man dies schreiben als:

$$(2.2.6) \quad -\partial^\rho E_0 \psi^* \sigma^{\mu\nu} \psi = -g^{\mu\rho} \partial^\tau : I_\tau \varepsilon : + \partial^\mu : I^\rho \varepsilon : + \\ + 2 i \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} \partial_\nu : I_\tau \varepsilon : - i g g^{\mu\nu\rho\tau} : (R_{(+)\nu} - R_{(-)\nu}) I_\tau \varepsilon + \\ + g \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} : [2 I_{\nu\tau} + (R_{(+)\nu} + R_{(-)\nu}) I_\tau] \varepsilon : \equiv \partial^\rho : I^\mu \varepsilon :$$

und

$$(2.2.7) \quad -E_0 \psi^* \sigma^{\mu\nu} \partial^\rho \psi = i \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} \partial_\nu : I_\tau \varepsilon : - 2 g^{\mu\rho} \partial^\tau : I_\tau \varepsilon : + \\ + 2 \partial^\mu_f : I^\rho \varepsilon : - g \varepsilon^{\mu\nu\rho\tau} : (R_{(+)\nu} - R_{(-)\nu}) I_\tau \varepsilon : \\ - i g g^{\mu\nu\rho\tau} : [2 I_{\nu\tau} + (R_{(+)\nu} + R_{(-)\nu}) I_\tau] \varepsilon : \equiv 2 \partial^\rho_f : I^\mu \varepsilon :$$

Vergleicht man die Spur, die spurlosen symmetrischen und antisymmetrischen Anteile auf beiden Seiten von 2.2.6 und 2.2.7, und verwendet man die lokale  $U_1$ -Eichinvarianzbedingung der Gleichung 2.1.22 (siehe 1.1.26)  $g \cdot E' = 1$ , so wird man auf sechs Bedingungen geführt, die sich auf die folgenden 3 "echten" Bedingungen reduzieren: (siehe im einzelnen dazu DWII Sec. 6).

$$(2.2.8) \quad \partial_\rho I^\rho = i g : (D_\rho \psi^\dagger \psi) I^\rho : - i g (I_\rho^\rho - \bar{I}_\rho^\rho)$$

$$(2.2.9) \quad \partial_{[r} I^{r]} = -i g_{1/2} : [I_r^r - \frac{1}{6} (D_2 \cdot (\{ \partial \} \}^{\sigma} f_{\sigma r}) I^r)] :$$

$$(2.2.10) \quad g \cdot [\frac{1}{2} (I^{[v\tau]} + \bar{I}^{[v\tau]})] = i \partial^{[v} I^{\tau]} - \frac{1}{4} \varepsilon^{\mu\nu\tau} \partial_{\mu} I_{\nu} + \\ + \frac{i}{4} g \varepsilon^{\mu\nu\tau} : (D_1 \{^{\sigma} f_{\sigma\mu}) I_{\nu} : - \frac{i}{4} g \varepsilon^{\mu\nu\tau} (I_{\mu\nu} - \bar{I}_{\mu\nu}) + \\ + \frac{1}{12} g : (D_2 \cdot (\{ \partial \} \}^{\sigma} f^{\sigma\nu}) I^{\tau}] :$$

mit den Differentialoperatoren

$$(2.2.11) \quad D_1 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)! 4^n} (\{ \partial \}^{2n}) = (1 + \frac{1}{24} (\{ \partial \}^2 + \dots))$$

$$(2.2.12) \quad D_2 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{(2n+3)(2n+1)! 4^n} (\{ \partial \}^{2n}) = 1 + \frac{1}{40} (\{ \partial \}^2 + \dots)$$

$$(2.2.13) \quad \text{und} \quad f_{\sigma r} = R_{\sigma, r} - R_{r, \sigma} \\ \text{sowie mit } g = 1.$$

D.h. wir können mit Hilfe der Feldgleichung über die Divergenz der Operatoren, die in  $I_r$  enthalten sind, solange nichts aussagen, wie wir nicht die "4-Ψ-Produkte"  $I_{v\tau}$  in unserer Theorie kennen. D.h. wie immer wir nach erhaltenen Strömen oder Energieimpulstensor suchen, der direkte Gebrauch der Feldgleichung in dem angegebenen Sinne, hilft uns nicht dabei, die Erhaltung der Ströme etc. wirklich nachzuweisen. Wir müssen deshalb einen anderen Weg finden, die Erhaltung zu etablieren. Das wollen wir im Kapitel III machen.

Bevor wir dazu kommen, noch kurz eine kleine Anmerkung.

Bei Rechnungen der Art 2.2.6 ff. stößt man sehr schnell unter Verwendung der Feldgleichung auf die Beziehung:

$$(2.2.14) \quad (1 - g E') \partial_\mu R^\mu = 0$$

D.h. im Fall der lokalen  $U_1$ -Eichinvarianz der Feldgleichung 2.1.22, d.h. wenn gilt:  $1 = g E'$  erhält man lediglich die "nichttriviale" Identität:

$$(2.2.15) \quad \partial_\mu R^\mu = \partial_\mu R^\mu$$

d.h. man bekommt mit der Feldgleichung keine neue Kenntnis über die Divergenz des  $R_\mu$  Feldes.

Wir haben also in diesem Paragraphen festgestellt, daß der direkte Gebrauch einer Feldgleichung 2.1.22 in unserem Modell nicht zu Aussagen über die Divergenz von Strömen etc. führt, wenn man nicht weitere zusätzliche Annahmen über die  $\psi$ -Produkte macht.

Wir werden deshalb im folgenden Kapitel zeigen, wie man in unserem Spinormodell in Form von Produktentwicklungen der Observablen mit anderen Operatoren die Erhaltung des Stromes bzw. Energieimpulstensors explizit und eindeutig inkorporieren kann.

Kapitel III: Effektive Konstruktion von erhaltenem Strom und Energieimpulsen  
mittels Operatorproduktbildung und Darstellung einer Algebra dieser  
Größen

III, § 1: Zur Problematik der Konstruktion von erhaltenen Strömen

Als lokal-eichinvariante Operatoren der dynamischen Dimension 3 und  
Twist 2 erhält man gemäß Kapitel II 2.1.5, 2.1.18 die beiden Subterme:

$$(3.1.0) \quad R_{\mu\vartheta\vartheta}(\kappa) = - : \psi^* a_{\mu} \left( \frac{i}{2} \vec{\partial}_{\vartheta} \right) \left( \frac{i}{2} \vec{\partial}_{\vartheta} \right) \psi :$$

und

$$(3.1.1) \quad R_{\vartheta\vartheta\mu}(\kappa) = - : \psi^* a_{\vartheta} \left( \frac{i}{2} \vec{\partial}_{\vartheta} \right) \left( \frac{i}{2} \vec{\partial}_{\mu} \right) \psi :$$

so daß man für den Strom selbst die Limeskombination

$$(3.1.2) \quad \dot{j}_{\mu}(\kappa) = \alpha R_{\mu\vartheta\vartheta}(\kappa) + \beta R_{\vartheta\vartheta\mu}(\kappa) + \gamma R_{[\mu,\sigma],\sigma}(\kappa) + \delta \varepsilon_{\mu\vartheta\lambda} R_{\vartheta\lambda,\lambda}(\kappa)$$

ansetzt.

Dabei sieht man sofort, daß die lokal-eichinvarianten Zusatzterme  $\gamma R_{[\mu,\sigma],\sigma}$   
und  $\delta \varepsilon_{\mu\vartheta\lambda} R_{\vartheta\lambda,\lambda}$ , gebildet aus äußeren Ableitungen keine Generator-  
eigenschaften haben und selbstverständlich, wegen der Antisymmetrie, erhalten  
sind. Daß sie keine Generatoreigenschaft haben, folgt ebenfalls aus der Anti-  
symmetrie, da mit  $\mu \neq 0$  zumindest eine der Ableitungen räumlich ist. Damit  
kann aber im gleichzeitigen Limes

$$(3.1.3) \quad [\gamma R_{[\mu,\sigma],\sigma}(\kappa) + \delta \varepsilon_{\mu\vartheta\lambda} R_{\vartheta\lambda,\lambda}(\kappa), \psi(\omega)] \underset{\kappa_0=0}{\approx} 2\partial \kappa_0^2 \delta^3(\vec{\kappa}) \psi$$

kein Term  $\sim \delta^3(\vec{\kappa}) \psi$  erzeugt werden.

Diese beiden Eigenschaften führen dazu, daß  $\gamma_{R\mu, \sigma} \epsilon^{\mu \nu \lambda} \delta \epsilon_{\nu \sigma \lambda} R_{\sigma \mu, \lambda}$  in vielen der folgenden Fälle keine Rolle spielt. Erst an den Stellen, an denen sie eine Rolle spielen, werden wir explizit darauf hinweisen.

Als allgemeine Eigenschaften des Stromes  $j_\mu(x)$  fordert man:

- 1.) Er muß ein endlicher Operator im schwachen Sinne sein.

Dies ist eine notwendige Bedingung für alle Observablen in einem sehr allgemeinen Sinne.

- 2.) Er muß ein lokaler Generator einer unitären Darstellung einer Phasentransformation im Zustandsraum sein, d.h. er muß die Bedingung

$$\lim_{x^0 \rightarrow 0} [j_\mu^0(x), \psi(x)] = -\delta^3(x) \psi(x) + \dots$$

wobei + weniger singuläre Terme berücksichtigt.

Dies ist eine quantenmechanische Definition des Stromoperators.

- 3.) Er muß lokal-eichinvariant sein, damit er eine Observable ist.

Auf dieses "Auswahlprinzip" sind wir in der Einleitung bereits eingegangen.

- 4.) Er muß erhalten sein

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_\mu^k(x) &= 0 \\ \text{oder} \quad \partial_\mu j_\mu^k(x) &= a \epsilon_{\mu \nu \lambda} \partial^\mu R^\nu \partial^\lambda R^k \end{aligned}$$

wenn die Theorie nicht nur formal invariant sein soll unter Phasentransformationen.

Dies drückt die Beziehung zwischen Symmetrien und Erhaltungssätzen aus.

$\epsilon_{\mu \nu \lambda} \partial^\mu R^\nu \partial^\lambda R^k$  sind Adler-artige Terme. Terme dieser

Struktur sind i.b. für den Axialvektorstrom in der Elektrodynamik untersucht worden<sup>(17)</sup>, aber auch für allgemeinere Fälle<sup>(17)</sup>.

D.h. dieser Strom 3.1.2 muß zusätzlich zu seinen Eigenschaften, wie sie sofort aus der Def. 2.1.18 gemäß der Wilsonhypothese folgen, nämlich ein lokaler, endlicher und lokal-eichinvarianter Operator zu sein, die Erhaltungs- sowie die Generator-Eigenschaften erfüllen, um so die Symmetrie unitär zu implementieren.

Verwendung der Feldgleichung 2.1.22, die, wie man erwarten könnte, direkt im Operatorsinne die Erhaltung des Stromes manifestieren sollte, führt im Fall der lokalen  $U(1)$  zu: siehe DWII, 2.28.

$$(3.1.4) \quad \partial_\mu I^\mu = i g : (\partial_\mu \xi^\mu \text{ for}) I^\mu : - i g (I_\mu^\mu - \bar{I}_\mu^\mu) \\ \text{mit } g = 1$$

Das heißt aber, die Feldgleichung sagt zunächst, ohne zusätzliche Annahmen über die  $\psi$ -Produktfunktion, nichts über die Divergenz der Subströme  $R_{\mu\mu}$  und  $R_{\mu\mu}$  aus, und damit auch nichts über  $j_\mu$ .

Da also der unmittelbare Gebrauch der Feldgleichung uns in der Frage nach der Erhaltung des Stromes nicht weiterführt, gehen wir deshalb einen neuen unkonventionellen Weg, die Erhaltung des Stromes bzw. Energieimpulstensors zu inkorporieren, einen Weg, der ohnehin durch die Wilsonhypothese nahegelegt wird, aber bisher wegen der mangelnden Kenntnis der Details wechselwirkender Modelle, nicht ausgeführt wurde (15)(16).

Es ist nun ein spezieller Zug unseres Modells, in das als wesentliches Prinzip eingeht, daß alle Felder sowie Observable einheitlich aus den abstrakten Spinorfeldern der Dimension  $1/2$  aufgebaut sind, so daß es möglich ist, in relevanten Operatorentwicklungen, wie z.B. 2.1.18 und 2.1.5, auch die Koeffizienten der eichinvarianten Operatoren festzulegen. Natürlicherweise ist es in den anderen Modellen, die nicht dieses einheitliche Bildungsprinzip aus abstrakten Spinorfeldern besitzen, nur möglich, mit dem Prinzip der Eichkovarianz die Koeffizientenfunktionen der eichvarianten Operatoren untereinander festzulegen, nicht aber die der eichinvarianten Größen (17).

Wir wollen also im folgenden die Bedingung der Erhaltung von Strömen und Energieimpulstensor in die Wilsonsche Operatorentwicklung einfügen, und zwar über die Kommutatorrelationen:

$$(3.1.5) \quad [\partial^\mu j_\mu(x), \sigma_{\alpha\beta\gamma\dots}(0)] = 0$$

$$(3.1.6) \quad [\partial^\mu \Theta_{\mu\nu}(x), \sigma_{\alpha\beta\gamma\dots}(0)] = 0$$

für alle Operatoren  $\sigma_{\alpha\beta\gamma\dots}(0)$ .

Bevor wir auf die Einzelheiten dieser neuen Methode eingehen, möchten wir sogleich darauf hinweisen, daß, da die zugrundegelegte Wilsonentwicklung im Split-Vektor die Zeit mitenthält, die Eigenschaften der Wilsonentwicklung zugleich Eigenschaften einer Feldgleichung sind, und daß Eingrenzungen einer Wilsonentwicklung durch die vorgegebenen Erhaltungsforderungen 3.1.5, 3.1.6 Hand in Hand mit einer Dynamik gehen.

So werden unter anderen für den Strom (analoges gilt für den Energieimpulstensor) die Erhaltungsforderungen zu einer Bestimmung der Koeffizienten  $\alpha$  und  $\beta$  in 3.1.2 führen, und damit zu einer Festlegung, wie in einem erhaltenen Strom die Subterme  $-\Psi^\dagger \sigma_\mu (\frac{1}{2} \vec{\partial}_2^{\vec{\partial}})(\frac{1}{2} \vec{\partial}_1^{\vec{\partial}}) \Psi$  und  $-\Psi^\dagger \sigma_\mu (\frac{1}{2} \vec{\partial}_2^{\vec{\partial}})(\frac{1}{2} \vec{\partial}_1^{\vec{\partial}}) \Psi$  zueinander in Relation stehen. Dabei ist z.B. klar, daß  $\Psi^\dagger \sigma_\mu \vec{\partial}_2^{\vec{\partial}} \vec{\partial}_1^{\vec{\partial}} \Psi$  wegen des darin enthaltenen Anteils  $\Psi^\dagger \sigma_\mu \vec{\partial}_2^{\vec{\partial}}$  in seinem Aufbau durch eine spezielle Dynamik charakterisiert ist, und damit also, wenn der Term  $\beta (-1) : \Psi^\dagger \sigma_\mu (\frac{1}{2} \vec{\partial}_2^{\vec{\partial}})(\frac{1}{2} \vec{\partial}_1^{\vec{\partial}}) \Psi :$  in der Stromdefinition eindeutig festgelegt ist, der Strom auch eine eindeutige Charakterisierung bezüglich seiner Dynamik erhält. I.b. würde gelten, daß, wenn man eine freie Theorie in den  $\Psi$ -Feldern hätte, wegen  $\vec{\partial} \Psi = \Psi^\dagger \vec{\partial} = 0$  auch  $-\beta : \Psi^\dagger \sigma_\mu (\frac{1}{2} \vec{\partial}_2^{\vec{\partial}})(\frac{1}{2} \vec{\partial}_1^{\vec{\partial}}) \Psi :$  sowie  $-\Psi^\dagger \sigma_\mu (\frac{1}{2} \vec{\partial}_2^{\vec{\partial}})(\frac{1}{2} \vec{\partial}_1^{\vec{\partial}}) \Psi$  keinen Beitrag liefern dürfen. Wir erwarten deshalb, daß die Aussagen, die aus 3.1.5, 3.1.6 folgen, die eine Seite der Dynamik widerspiegeln, deren Kenntnis gerade bei dem Lichtkegelkommutator zweier Ströme wesentlich eingeht. Dabei ist auch klar, daß die Lichtkegelentwicklung zweier Ströme einem Satz von gleichzeitigen Strom-Strom-Kommutatoren mit sämtlichen Zeitableitungen darauf äquivalent ist und damit eine dynamische Aussage enthält.

Um im folgenden die Kommutatoren 3.1.5, 3.1.6 sowie den Nachweis der Generatoreigenschaften

$$(3.1.7) \quad [j_0(x), \Psi(x)] = -\delta^3(x) \Psi$$

$x_0 = 0$

$$(3.1.8) \quad [\Theta_{00}(x), \Psi(x)] = -\frac{1}{4} (\partial_i \delta^3(x)) \Theta_{0i} \Psi(x) - \delta^3(x) \partial_0 \Psi(x)$$

$x_0 = 0$

$$(3.1.9) \quad [\Theta_{0i}(x), \Psi(x)] = -\frac{1}{8} (\partial_j \delta^3(x)) \Theta_{ij} \Psi(x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} (\partial_i \delta^3(x)) \Psi(x) - \delta^3(x) \partial_i \Psi(x)$$

mit:  $d = \frac{1}{2}$  Dimension des  $\Psi$ -Feldes.

explizit ausführen zu können, definieren wir Regeln, die teilweise plausibel, aber zur Zeit nicht stringent bewiesen sind.

### III. § 2: Regeln zur Kommutatorbildung von Observablen mit anderen Operatoren

#### Regel I.

In den früheren Betrachtungen über die lokale Eichinvarianz der Theorie, sowie der Definition von eichvarianten und eichinvarianten Feldern, wurde immer explizit gezeigt, daß die spezielle Natur der dimensionslosen Funktion  $E_0(\xi)$  in 2.1.1 irrelevant ist; i.b. konnte es zugelassen sein, daß  $E_0$  eine logarithmische Funktion ist (siehe S.10). Nach wie vor wollen wir die Möglichkeit der logarithmischen Natur der  $E_0$ -Funktion nicht ausschließen, wollen aber fordern, daß  $E_0(\xi)$  sich bezüglich der Kommutatoreigenschaften wie eine endliche Konstante verhält und fordern deshalb als:

(3.2.1)

$$\text{Kommutatorregel I: } E_0(\xi) = 1$$

#### Regel II.

In der Definition der Subströme  $R_{rss}$  und  $R_{ssr}$  gemäß 3.1.0, 3.1.1, sieht man: Um lokale Eichinvarianz dieser Subströme zu haben, treten in der Wilsonentwicklung Terme der dynamischen Dimension 3 vom Typ:

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} &: R^{(T)} R_T : ; R^{T^2} R_T : ; R^T R_T R^T : \\ &: R^{T^2 T} R_T : ; \partial^T \partial^T R_T : ; \square R_T \end{aligned}$$

auf.

Die eichvarianten Wilsonterme kleinerer dynamischer Dimension als 3, nämlich:

$$(3.2.3) \quad C_{\mu\nu\rho}(\xi) K^{\mu\nu\rho}(x)$$

enthalten gemäß 0.2 eine vom point-split-Vektor  $\xi$  abhängende Koeffizientenfunktion  $C_{\mu\nu\rho}(\xi)$  mit physikalischer Dimension  $> 0$ . Für solche Wilsonterme gilt dann:

1.) Wegen ihrer dynamischen Dimension kleiner als 3 tragen sie nicht zur führenden Lichtkegelsingularität bei.

2.) Da  $C_{\mu\nu\rho}(\xi)$  eine physikalische Dimension  $> 0$  hat und nicht eine dimensionierte Konstante darstellt, [das könnte nach dem Prinzip der gebrochenen Skaleninvarianz nur dann auftreten, wenn es zugleich denselben Operator  $K^{\mu\nu}_{(\kappa)}$  mit echt singulärer Koeffizientenfunktion gibt] ist der Kommutator:

$$(3.2.4) \quad [C_{\mu\nu\rho}(\xi) K^{\mu\nu}_{(\kappa)}, O_{\gamma\delta\epsilon\dots}(\phi)]$$

eine Funktion auch der Variablen  $\xi$ . Da dieser Wilsonterm aber im Limes  $\xi \rightarrow 0$  den lokalen Operator  $R_{\mu\nu\sigma\rho}$  (oder  $R_{\sigma\sigma\mu\nu}$ ) mitdefiniert, so muß, wenn man resultativ

$$(3.2.5) \quad [R_{\mu\nu\sigma\rho}(\kappa), O_{\gamma\delta\epsilon\dots}(\phi)] \quad \text{oder} \quad [R_{\sigma\sigma\mu\nu}(\kappa), O_{\gamma\delta\epsilon\dots}(\phi)]$$

betrachtet, automatisch aus den anderen Wilsontermen ein Gegenterm erzeugt werden, der 3.2.4 beseitigt, da 3.2.5 <sup>(18)</sup> nur eine Funktion von  $x$  ist. Dies kann explizit gezeigt werden <sup>(2.2)</sup>. D.h. wir brauchen die Wilsonterme dynamischer Dimension  $< 3$  bei unseren Kommutatorrelationen des Stromes überhaupt nicht zu berücksichtigen.

Nun zurück zu den eichvarianten Wilsontermen der dynamischen Dimension 3 in 3.2.2.

Von  $\partial^\mu \partial^\nu R_{\mu\nu}(\kappa)$  und  $\square R_\mu(\kappa)$  ist sofort klar, daß sie Kommutatorbeiträge liefern. Wir untersuchen daher die 4 weiteren Terme aus 3.2.2. Dazu eine Vorbemerkung: Auf Grund unseres einheitlichen Bildungsprinzips für alle Feldoperatoren aus den abstrakten Feldern, zeigt man, daß mit der Jacobi-Identität in jedem Kommutator der Form

$$(3.2.6) \quad [A, O_{\alpha\beta\gamma}]$$

$$(3.2.7) \quad \text{der Kommutator } [A, \psi] \quad \text{enthalten ist.}$$

Dann gilt:

3.) Auf der Grundlage der lokalen Eichvarianz haben wir die folgende Wilsonentwicklung (DWII Anhang)

$$(3.2.8) \quad : R_z^\tau R_\mu : = \lim_{\eta \rightarrow 0} \{ R_z^\tau(x) R_\mu(x+\eta) - b_2(\eta) I \}$$

und damit gilt für Kommutatoren, entwickelt für kleine Abstände oder am Lichtkegel:

$$(3.2.9) \quad [ : R_z^\tau R_\mu : (x), \psi(0) ] = \lim_{\eta \rightarrow 0} [ R_z^\tau(x) R_\mu(x+\eta), \psi(0) ]$$

$$(3.2.10) \quad = \lim_{\eta \rightarrow 0} \{ R_z^\tau(x) [ R_\mu(x+\eta), \psi(0) ] + [ R_z^\tau(x), \psi(0) ] R_\mu(x+\eta) \}$$

Für den ersten Term erhalten wir:

$$(3.2.11) \quad \begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} R_z^\tau(x) [ R_\mu(x+\eta), \psi(0) ] &\sim \lim_{\eta \rightarrow 0} R_z^\tau(x) (x+\eta)_\mu \varepsilon(x+\eta)_\nu \delta(x+\eta)^2 \psi(x+\eta) \\ &\sim \lim_{\eta \rightarrow 0} a_2(\eta) (x+\eta)_\mu \varepsilon(x+\eta)_\nu \delta(x+\eta)^2 \psi(x) \end{aligned}$$

und dieser Term fällt wegen 2.) weg.

Für den zweiten Term in 3.2.10 hat man:

$$(3.2.12) \quad \begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0} [ R_z^\tau(x), \psi(0) ] R_\mu(x+\eta) &= \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ -\frac{i}{2} \psi^*(x-\frac{\xi}{2}) \sigma_\tau \vec{\partial}_\tau \psi(x+\frac{\xi}{2}) - i d_1^\mu R_\mu(x) - d_0^\mu : R_\mu R_\lambda : (x), \psi(0) \right] R_\mu(x+\eta) \end{aligned}$$

Hier können lediglich der erste und der letzte Term möglicherweise einen Beitrag liefern. Für den ersten Term finden wir

$$(3.2.13) \quad \begin{aligned} &\sim \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\xi \rightarrow 0} \partial_\xi^\tau \left[ \psi^*(x-\frac{\xi}{2}) \sigma_\tau \psi(x+\frac{\xi}{2}), \psi(0) \right] R_\mu(x+\eta) \\ &\sim \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\xi \rightarrow 0} \partial_\xi^\tau (x-\frac{\xi}{2})_\tau \varepsilon(x-\frac{\xi}{2})_\nu \delta(x-\frac{\xi}{2})^2 \psi(x+\frac{\xi}{2}) R_\mu(x+\eta) \end{aligned}$$

$$(3.2.14) \quad \sim \lim_{\eta \rightarrow 0} \left[ \partial^\tau x_\tau \varepsilon(x_0) \delta(x_1) \right] \frac{1}{\eta^2} \psi(x+\eta) + \dots$$

und dieser Term fällt ebenso wegen 2.) weg.

$$(3.2.15) \text{ Wegen } : R_\mu R_\lambda : (x) = \lim_{g \rightarrow 0} \{ R_\mu(x) R_\lambda(x+g) - \bar{d}_{2\mu\lambda}(g) I \}$$

ergibt der letzte Term in 3.2.12:

$$(3.2.16) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{g \rightarrow 0} d_0^{\mu\lambda}(\xi) [R_\mu(x) R_\lambda(x+g), \psi(0)] R_\mu(x+\eta) \\ \sim \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{g \rightarrow 0} d_0^{\mu\lambda}(\xi) \{ (x+g)_\lambda \varepsilon(x+g)_\mu \delta(x+g)^2 R_\mu(x) \cdot \\ \cdot R_\mu(x+\eta) \psi(x+g) + x_\mu \varepsilon(x)_\lambda \delta(x)_\mu R_\lambda(x+g) R_\mu(x+\eta) \psi(x) \} + \\ \sim \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\xi \rightarrow 0} d_0^{\mu\lambda}(\xi) x_\lambda \varepsilon(x)_\mu \delta(x)_\mu \bar{d}_2^{\mu\mu}(\eta) \psi(x)$$

und dieser Term trägt wiederum wegen 2.) nichts bei.

$$(3.2.17) \text{ D.h. } [ : R^{\mu\mu} R_\mu : (x), \psi(0) ] \quad \text{trägt nicht bei.}$$

4.) Analog zeigt man für

$$[ : R^{\mu\mu} R_\mu : , \psi ] \quad \text{sowie} \quad [ : R^{\mu\mu} R_\mu : , \psi ]$$

daß es nicht beiträgt.

5.) Auf der Grundlage der lokalen Eichkovarianz hat man die folgende Wilsonentwicklung: (siehe R.A. Brandt Phys.Rev. 166, S.1812 (1968))

$$(3.2.18) : R_\nu R_\mu R_\lambda : = \lim_{\eta \rightarrow 0} [ R_\nu(x+\eta) R_\mu(x) R_\lambda(x-\eta) - \\ - \bar{B}_{2\nu\mu\lambda}^{\alpha}(\eta) R^\alpha(x) - \bar{B}_{3\nu\mu\lambda}^{\alpha\beta}(\eta) R^{\alpha\beta}(x) - \\ - \bar{B}_{4\nu\mu\lambda}^{\alpha\beta\gamma}(\eta) R^{\alpha\beta\gamma} - \dots ]$$

$$(3.2.19) \text{ mit } B_{\mu}^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} D_{\nu\kappa}(\eta) \delta_{\lambda}^{\alpha} \eta^{\beta} \eta^{\gamma} + \frac{1}{2} D_{\kappa\lambda}(\eta) \delta_{\nu}^{\alpha} \eta^{\beta} \eta^{\gamma}$$

$$(3.2.20) \text{ und } D_{\nu\kappa}(\eta) = \langle 0 | T R_{\nu}(x+\eta) R_{\kappa}(x) | 0 \rangle$$

Analog wie in 3.) und 4.) zeigt man mit 2.), daß der point-split-Term nicht zum Kommutator beiträgt.

Dagegen kommen natürlich Beiträge von

$$(3.2.21) \quad B_{\mu\nu\kappa\lambda}^{\alpha\beta\gamma}(\eta) R^{\alpha\beta\gamma}(\kappa)$$

wobei über  $\eta$  gemittelt ist, und somit  $\simeq \square R_{\mu}$  und  $\simeq \partial^{\mu} \partial^{\kappa} R_{\kappa}$  sind.

Bemerkung zu den Punkten 3.), 4.) und 5.): Wegen der Problematik von Doppel-Wilson-Entwicklungen ist der dort geführte Nachweis nicht stringent; wir fordern daher die so gefundenen Ergebnisse aus 3.), 4.), 5.) als Regel II und formulieren.

Regel II: Nur die reinen Ableitungsterme in der Definition des Stromoperators bzw. Energieimpulstensors bzw. anderer Operatoren können zu Kommutatorrelationen beitragen. Die äußeren Ableitungsterme stammen dabei zum Teil aus Wilson-termen, der Art, wie es in 5.) gezeigt ist.

D.h. in Kommutatorrelationen verhält sich der Strom wie

$$(3.2.22) \quad j_{\mu}(x) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left[ \alpha \square_{\mu} g_{\mu\lambda} + \beta \partial_{\mu} \partial_{\lambda} \right] \psi(x-\frac{\epsilon}{2}) \gamma_{\lambda} \psi(x+\frac{\epsilon}{2}) + W_1 \square_{\mu} R_{\mu}(x) + W_2 \partial_{\mu} \partial_{\lambda} R_{\lambda}(x) \right\} +$$

+ Terme, die im Kommutator nichts beitragen.

(Bemerkung:  $\oint \varepsilon_{\mu\nu\lambda} R_{\mu\nu\lambda}$  vernachlässigen wir, da wir erwarten, daß es sich über Belinfantebeziehungen auf die Anteile  $\alpha, \beta, W_1$  und  $W_2$  zurückführen läßt)

Der Energieimpulstensor verhält sich entsprechend in Kommutatorrelationen wie:

$$(3.2.23) \quad \Theta_{\mu\nu} = \frac{i}{4\pi^2} \left\{ A g_{\mu\kappa} \square \partial_\nu + B \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu - C \partial_\kappa \partial_\mu \partial_\nu + \right. \\ \left. + D g_{\mu\nu} \square \partial_\kappa - E g_{\mu\nu} \square \partial_\kappa - F g_{\mu\kappa} \square \partial_\nu - \right. \\ \left. - G \partial_\mu \partial_\nu \partial_\kappa - H g_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\lambda \partial_\kappa \right\} E_0 \psi^*_{(\alpha-\frac{1}{2})} \psi_{(\alpha+\frac{1}{2})} +$$

+ Terme, die im Kommutator nichts beitragen.

Folgerung aus Regel II: Aus dieser Regel folgt sofort, daß Adlerterme, die vom Typ 4.) sind, bei Kommutatorrelation effektiv nichts beitragen !

Regel III.

Die folgende Regel zur Berechnung von Kommutatorrelationen definieren wir hier rein abstrakt. Wir zeigen aber beim expliziten Nachweis der Generatoreigenschaft des Energieimpulstensors, in welchem Sinne sie aufzufassen ist.

Dazu formulieren wir zunächst der Einfachheit halber eine technische Einschränkung der Erhaltungsforderung 3.1.5, 3.1.6, nämlich daß der dort auftretende Operator  $O_{\alpha\beta\gamma\dots}$  selbst lokal eichinvariant ist. Damit aber ist auch das Produkt

$$(3.2.24) \quad \partial_j \cdot \partial_{\alpha\beta\gamma\dots} \quad \text{sowie} \quad \partial^\nu \theta_{\mu\nu} = \partial_{\alpha\beta\gamma\dots}$$

lokal eichinvariant, und wir brauchen somit diese Produkte nur nach dem eichinvarianten Anteil zu entwickeln (alle eichvarianten Terme heben sich weg). Dies hat auch noch den weiteren Vorteil, daß, da man in der Kommutatordefinition des Stromes 3.2.22 nur "effektive" Koeffizienten  $W_1$  und  $W_2$  hat, die aus den Wilsontermen stammen, so daß man die lokale Eichinvarianz des Stromes bzw. Energieimpulstensors nicht sofort einsieht, dennoch die lokale Eichinvarianz des Stromes bzw. Energieimpulstensors gewährleistet ist, da  $\int_P \cdot \partial_{\alpha\beta\gamma\dots}$  bzw.  $\partial_{\mu\nu} \cdot \partial_{\alpha\beta\gamma\dots}$  lokal eichinvariant entwickelt wird, und mit  $\partial_{\alpha\beta\gamma\dots}$  dann auch  $\int_P$  bzw.  $\partial_{\mu\nu}$  lokal eichinvariant ist.

Regel III: Bei Kommutatoren der Art 3.1.5, 3.1.6, d.h.

$$\begin{aligned} D(x, y, \xi, \eta) & \left[ \psi^*(x - \frac{\xi}{2}) \psi(x + \frac{\xi}{2}), \psi^*(y - \frac{\eta}{2}) \psi(y + \frac{\eta}{2}) \right] = \\ & = D(x, y, \xi, \eta) \left( \psi^*(x - \frac{\xi}{2}) \{ \psi(x + \frac{\xi}{2}), \psi^*(y - \frac{\eta}{2}) \} \psi(y + \frac{\eta}{2}) \right. \\ & \quad - \psi^*(y - \frac{\eta}{2}) \{ \psi(y + \frac{\eta}{2}), \psi^*(x - \frac{\xi}{2}) \} \psi(x + \frac{\xi}{2}) \\ & \quad - \psi^*(x - \frac{\xi}{2}) \psi^*(y - \frac{\eta}{2}) \{ \psi(x + \frac{\xi}{2}), \psi(y + \frac{\eta}{2}) \} \\ & \quad \left. + \{ \psi^*(x - \frac{\xi}{2}), \psi^*(y - \frac{\eta}{2}) \} \psi(y + \frac{\eta}{2}) \psi(x + \frac{\xi}{2}) \right) \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

mit  $D(x, y, \xi, \eta)$  einem Differentialoperator, der die Differentiation  $\partial_x, \partial_y, \partial_\xi, \partial_\eta$  enthält und dessen exakte Struktur durch den Strom - bzw. Energieimpulsoperator 3.2.22, 3.2.23 sowie dem jeweiligen eichinvarianten Operator  $\partial_{\alpha\beta\gamma\dots}$  festgelegt ist,

sowie Ausführung des  $\lim_{\xi \rightarrow 0}$  und  $\lim_{\eta \rightarrow 0}$  nach Differentiation, und Entwicklung von  $(x-y)$  am Lichtkegel oder als "kleiner" Abstand;

sowie im Nachweis der Generatoreigenschaft, bei Kommutatoren der Art:

$$\begin{aligned} (3.2.26) \quad \hat{D}(x, y, \xi) & \left[ \psi^*(x - \frac{\xi}{2}) \psi(x + \frac{\xi}{2}), \psi(y) \right]_{\text{gleiche Zeiten}} \\ & \cong \hat{D}(x, y, \xi) \left\{ \psi^*(x - \frac{\xi}{2}), \psi(y) \right\} \psi(x + \frac{\xi}{2})_{\text{gleiche Zeiten}} \end{aligned}$$

mit  $\tilde{D}(x, y, \xi)$  einem Differentialoperator, dessen Struktur gemäß Regel III durch den Strom- bzw. Energieimpulstensor fest vorgegeben ist,

bei Kommutatoren also der Art 3.2.25 und 3.2.26

tragen aus dem darin auftretenden Antikommutator  $\{\psi^*, \psi\}$ , der über 2.1.1 ff. gebildet wird, nur der C-Zahl-Anteil bei, wenn man nach eichinvarianten Operatoren oder nach dem Spinorfeld  $\psi(x)$  der Dimension 1/2 entwickelt.

Entwickelt man dagegen z.B. beim Nachweis der Generatoreigenschaft des Energieimpulstensors nach eichvarianten Operatoren größerer Dimension als 1/2, z.B. nach  $\partial_\mu \psi$ , so trägt im  $\{\psi^*, \psi\}$ -Antikommutator auch der Q-Zahl-Anteil bei.

Um jetzt die Erhaltungsforderung in Kommutatorform, explizit auszurechnen, ersetzen wir bisweilen die Operatorbeziehung durch ihr Äquivalenz  $\langle p | \dots | p' \rangle$ . Insbesondere müssen dann diese Matrixelemente  $\langle p | \dots | p' \rangle$  auch für  $p' = p$  gelten, und für diese eingeschränkte aber technisch besonders einfache Klasse führen wir im allgemeinen den Nachweis. Diese technische Vereinfachung rührt daher, daß für diejenigen Entwicklungsoperatoren solcher Kommutatoren, die sich als  $D_x O(x)$  schreiben, mit  $D_x$  einem äußeren Ableitungsoperator,

$$(3.2.27) \quad \langle p | D_x O(x) | p \rangle = 0 \quad \text{gilt, wenn } O(x) \text{ keinen}$$

Pol  $\frac{1}{(p-p')^n}$  mit  $p' \rightarrow p$  hat. Dabei führt diese technische Einschränkung auf Vorwärts-Matrixelemente, wie wir sehen werden, in unserem Modell nicht zu physikalischen Einschränkungen, da bei uns die Observablen in ihrer wesentlichen Struktur durch innere Ableitungen gebildet sind, für die die obige Relation 3.2.27 nicht gilt. An den Stellen aber, wo wir explizit auch den Beitrag der äußeren Ableitungsterme in dem Entwicklungssatz der rechten Seite der Kommutatoren vollständig bestimmen wollen, gehen wir von dieser technischen Vereinfachung  $\langle p | \dots | p \rangle$  ab, und weisen die jeweilige Kommutatorbeziehung direkt im Operatorsinne nach.

Mit diesen Kommutatorregeln I, II, III und den Erhaltungsforderungen 3.1.5, 3.1.6 sowie den Generatoreigenschaften 3.1.7, 3.1.8, 3.1.9 folgt dann für unser Spinormodell, in das, um es erneut zu wiederholen, als das

wesentlichste, wichtigste und unverzichtbare Prinzip die Forderung eingeht, alle Feldoperatoren einheitlich aus den abstrakten Spinorfeldern der Dimension  $1/2$  aufzubauen, das folgende Schema, in welchem sich eine enorme Konsistenz dieser Methode manifestiert, sowie das explizite Resultat herauskommt, daß es sich bei diesem Modell um ein echtes nichtlineares Modell handelt.

### III. § 3: Konstruktion des erhaltenen Stromes

I. Für die Stromkommutatorbeziehungen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 (3.3.0) \quad 1.) \quad [j_0(x), \psi(0)]_{x_0=0} &= \left[ \frac{1}{4\pi^2} \left\{ [\alpha \square_\xi g_{0\lambda} + \beta \partial_0 \partial_\lambda] \psi^*(x-\frac{\xi}{2}) \sigma_\lambda \psi(x+\frac{\xi}{2}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + W_1 \square R_0 + W_2 \partial_0 \partial_\kappa R_\kappa(x) \right\} \psi(0) \right]_{x_0=0} \\
 &= \left[ \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \alpha \square_\xi + W_1 \square \right\} \left[ \psi^*(x-\frac{\xi}{2}) \sigma_0 \psi(x+\frac{\xi}{2}), \psi(0) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \beta \partial_0 \partial_\kappa + W_2 \partial_0 \partial_\kappa \right\} \left[ \psi^*(x-\frac{\xi}{2}) \sigma_\kappa \psi(x+\frac{\xi}{2}), \psi(0) \right] \right]_{x_0=0} \\
 &\stackrel{!}{=} -\delta^3(\vec{x}) \psi
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(3.3.1) \quad 1 = \alpha + \beta + 4(W_1 + W_2)$$

Die weiteren Forderungen sind Erhaltungsforderungen der Art. 3.1.5.

So folgt: (Wir führen hier für den einfachen Fall einer Erhaltungsforderung den Fall etwas genauer aus:)

$$\begin{aligned}
 (3.3.2) \quad 2.) \quad &\langle p | [\partial^\mu j_\mu(x), R_{\nu\nu}(0)] | p \rangle \\
 &= \langle p | \frac{1}{4\pi^2} \left[ \alpha \partial^\mu \square_\xi \psi^* \sigma_\mu \psi + \beta \partial^\mu \partial_\xi \partial_\kappa \psi^* \sigma_\kappa \psi + \right. \\
 &\quad \left. + (W_1 + W_2) \square \partial^\mu R_\mu(x), \partial_\nu \psi^*(-\frac{\xi}{2}) \sigma_\nu \psi(+\frac{\xi}{2}) \right] | p \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle p | \frac{1}{4\pi^2} \{ \alpha \partial^\mu \square_\gamma \partial_\mu^\nu + (W_1 + W_2) \square \partial^\mu \} [ \psi^*(x - \frac{1}{2}) \sigma_\mu \psi(x + \frac{1}{2}) ] \psi^*(x + \frac{1}{2}) \sigma_\mu \psi(x + \frac{1}{2}) ] | p \rangle \\
 &+ \frac{1}{4\pi^2} \{ \beta \partial^\mu \partial_\mu^\nu \partial_\mu^\mu \partial_\mu^\mu \} [ \psi^*(x - \frac{1}{2}) \sigma_\mu \psi(x + \frac{1}{2}), \psi^*(x - \frac{1}{2}) \sigma_\mu \psi(x + \frac{1}{2}) ] | p \rangle = \\
 (3.3.3) \quad &= \langle p | \frac{1}{4\pi^2} \{ \alpha \partial^\mu \square_\gamma \partial_\mu^\nu + (W_1 + W_2) \square \partial^\mu \} (-1) \psi^*(x - \frac{1}{2}) \sigma_\mu^\nu \cdot \\
 &\cdot [ \psi^*(x - \frac{1}{2}), \psi(x + \frac{1}{2}) ] \sigma^\mu \psi(x + \frac{1}{2}) + (\vec{F}^2) \\
 &+ \frac{1}{4\pi^2} \{ \beta \partial^\mu \partial_\mu^\nu \partial_\mu^\mu \partial_\mu^\mu \} (-1) \psi^*(x - \frac{1}{2}) \sigma_\mu [ \psi^*(x - \frac{1}{2}), \psi(x + \frac{1}{2}) ] \sigma_\mu \psi(x + \frac{1}{2}) \\
 &+ (\vec{G}^2) | p \rangle
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3.3.4) \quad &= \langle p | [ \frac{1}{4\pi^2} \{ \partial^\mu \square_\gamma \partial_\mu^\nu + (W_1 + W_2) \square_x \partial^\mu \} \cdot \\
 &\cdot (g_{\mu\nu} g_{\mu\nu} - i \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}) + (\Leftarrow) + \frac{1}{4\pi^2} \{ \beta \partial^\mu \partial_\mu^\nu \partial_\mu^\mu \partial_\mu^\mu \} \cdot \\
 &\cdot (g_{\mu\nu} g_{\mu\nu} - i \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}) + (\Leftarrow) ] \cdot \\
 &\quad \mathcal{D}_{\sigma}^{(2,1)}(x, y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\cdot H \cdot (x - \frac{1}{2} - \frac{y}{2})_\sigma \varepsilon((x - \frac{1}{2} - \frac{y}{2})_\sigma) \delta((x - \frac{1}{2} - \frac{y}{2})^2) \cdot \\
 &\cdot \psi^*(x - \frac{y}{2}) \sigma_\mu \psi(x + \frac{1}{2}) | p \rangle \stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned}$$

Man rechnet gemäß 3.2.25, wobei  $\{\psi, \psi\}$  sowie  $\{\psi^*, \psi^*\}$  keinen c-Zahl-Anteil haben und deswegen mit Regel III im Kommutator nicht beitragen.

H ist eine bekannte einfache Konstante.

Dabei hat man jetzt das Operatorprodukt  $\psi^*(x - \frac{y}{2}) \sigma_\mu \psi(x + \frac{1}{2})$  nach seinen eichinvarianten Anteilen zu entwickeln. Hierbei führen wir jetzt für alle folgenden Rechnungen eine formale Umdefinition in der  $\mathcal{F}(x, y)$ -Entwicklung, wie sie in 2.1.18 angegeben ist, ein. Wir interessieren uns bei den folgenden Rechnungen insbesondere für die Twist-2-Anteile der Dimension 3, sowie die der Dimension 4 aus der Entwicklung 2.1.18. Diese Anteile heben wir besonders hervor und teilen sie dann in der folgenden naheliegenden Weise auf:

$$(3.3.5) \quad I_F(x, y) = \dots + \xi^2 \tilde{J}_F + \xi \mu \xi_v \tilde{J}_v + i \xi \lambda \xi^2 \tilde{\Theta}_{\lambda v} + i \xi \mu \xi \lambda \xi_v \tilde{\Theta}_{\lambda v} + \dots$$

D.h. wir entwickeln jetzt  $\mathcal{M}^{\star}(-\frac{q}{2}) \mathcal{G}_c \mathcal{M}(x+\frac{q}{2})$  aus 3.3.4 nach  $\tilde{J}, \tilde{J}, \tilde{\Theta}$  sowie  $\tilde{\Theta}$ .

2a.)

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{\mathcal{G}^2}^{(2+1)}(x, \xi, q) \cdot H \cdot (x - \frac{q}{2} - \frac{q}{2})_{\mathcal{G}} \mathcal{E}((x - \frac{q}{2} - \frac{q}{2})_0) \delta((x - \frac{q}{2} - \frac{q}{2})^2) \cdot \\ & \cdot (-x - \frac{q}{2} - \frac{q}{2})^2 \langle p | \tilde{J}_c | p \rangle \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und daraus folgt:

$$(3.3.6) \quad 6\alpha - 3\beta = 0$$

Sowie die unabhängige Forderung:

2b.)

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{\mathcal{G}^2}^{(2+1)}(x, \xi, q) \cdot H \cdot (x - \frac{q}{2} - \frac{q}{2})_{\mathcal{G}} \mathcal{E}((x - \frac{q}{2} - \frac{q}{2})_0) \delta((x - \frac{q}{2} - \frac{q}{2})^2) \cdot \\ (3.3.7) \quad & \cdot (-x - \frac{q}{2} - \frac{q}{2})^2 (-x - \frac{q}{2} - \frac{q}{2})^2 \langle p | \tilde{J}_\lambda | p \rangle \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und daraus folgt:

$$(3.3.8) \quad \frac{3}{2} \beta - 12 W_1 - 12 W_2 = 0.$$

Aus den Forderungen 1.) + 2a) + 2b) folgt bereits die Aussage:

$$(3.3.9) \quad A : \begin{cases} \alpha = \frac{1}{4} \\ \beta = \frac{1}{2} \\ W_1 + W_2 = \frac{1}{16} \end{cases}$$

Genauso wie in 2.) gezeigt, berechnet man die Erhaltungsforderung

3.)

$$(3.3.10) \quad \langle p | [\partial^{\mu} j_{\mu}, R_{\nu\sigma}] | p \rangle \stackrel{!}{=} 0$$

$$(3.3.11) \quad \text{mit } R_{\nu\sigma} = -\frac{i}{2} : \psi^{\dagger} \epsilon_{\nu\sigma} \overleftrightarrow{\partial} \psi : \quad \text{lokal-eichinvariant,}$$

die wiederum in die beiden unabhängigen Anteile nach

$$\langle p | \tilde{j} | p \rangle \quad \text{sowie} \quad \langle p | \tilde{\tilde{j}} | p \rangle \quad \text{aufspaltet.}$$

So erhält man:

3a.)

$$\text{Aus} \quad \langle p | [\partial^{\mu} j_{\mu}, R_{\nu\sigma}] | p \rangle = 0 \cdot \langle p | \tilde{j} | p \rangle + \dots$$

$$(3.3.12) \quad \text{folgt:} \quad 4\alpha - \beta - 8(W_1 + W_2) = 0$$

und man sieht, daß 3a.) durch  $A = 1.) + 2a.) + 2b.)$  bereits erfüllt ist!

Sowie 3b.)

$$\text{Aus} \quad \langle p | [\partial^{\mu} j_{\mu}, R_{\nu\sigma}] | p \rangle = 0 \cdot \langle p | \tilde{\tilde{j}} | p \rangle + \dots$$

folgt:

$$(3.3.13) \quad 3\alpha - \frac{5}{2}\beta + 8(W_1 + W_2) = 0$$

und wiederum sieht man, daß 3b.) durch  $A = 1.) + 2a.) + 2b.) \hat{=} (3.3.9)$  bereits erfüllt ist.

Weiterhin errechnet man aus der Erhaltungsforderung

$$(3.3.14) \quad 4.) \quad \langle p | [\partial^{\mu} j_{\mu}, f_{\nu\sigma}] | p \rangle$$

$$\text{mit } f_{\nu\sigma} = R_{\nu\sigma} - R_{\sigma\nu}$$

was wiederum in die unabhängigen Forderungen 4a.) und 4b.) aufspaltet:

4a.)

Aus  $\langle p | [\partial^\mu j_\mu, f_{\nu\sigma}] | p \rangle = 0 \cdot \langle p | \tilde{j} | p \rangle + \dots$

folgt

$$(3.3.15) \quad 4\alpha - 2\beta = 0$$

und man sieht sofort, daß 4a.) bereits durch die Aussage 3.3.9

$$A = 1.) + 2a.) + 2b.)$$

erfüllt ist.

Sowie

4b.)

Aus  $\langle p | [\partial^\mu j_\mu, f_{\nu\sigma}] | p \rangle = 0 \cdot \langle p | \tilde{j} | p \rangle + \dots$

folgt:

$$(3.3.16) \quad 2\alpha + \beta - 16(W_1 + W_2) = 0$$

und man sieht erneute Konsistenz, daß also 4b.) bereits durch die Aussage

$$A = 1.) + 2a.) + 2b.)$$

erfüllt ist.

Im folgenden betrachten wir die Erhaltungsforderung der Kommutatorrelation:

$$(3.3.17) \quad \langle p | [\partial^\mu j_\mu(x), j_\nu(y)] | p \rangle \stackrel{!}{=} 0$$

Dabei numerieren wir die Teilstücke wie folgt:

$$\begin{aligned}
 (3.3.18) \quad & \langle p | [\partial^\mu j_\mu(x), j_\nu(y)] | p \rangle = \\
 & = \langle p | \frac{1}{(4\pi)^2} \partial_x^\mu \left[ \overbrace{(\alpha \square_\mu \psi^*(x-\frac{1}{2}) \partial_\mu \psi(x+\frac{1}{2}))}^\alpha + \overbrace{(\beta \partial_\mu \psi \partial_\mu \psi^*(x-\frac{1}{2}) \partial_\mu \psi(x+\frac{1}{2}))}^\beta \right. \\
 & \quad + \overbrace{W_1 \square R_\mu(x)}^\gamma + \overbrace{W_2 \partial_\mu \partial_\mu R_\mu(x)}^\delta, \underbrace{\alpha \square_\mu \psi^*(y-\frac{1}{2}) \partial_\mu \psi(y+\frac{1}{2})}_\alpha \\
 & \quad \left. + \underbrace{(\beta \partial_\mu \partial_\mu \psi^*(y-\frac{1}{2}) \partial_\mu \psi(y+\frac{1}{2}))}_\beta + \underbrace{W_1 \square R_\nu(y)}_\gamma + \underbrace{W_2 \partial_\nu \partial_\nu R_\nu(y)}_\delta \right] | p \rangle
 \end{aligned}$$

Dieser Kommutator spaltet gemäß 3.3.5 bei Entwicklung nach den lokal eichinvarianten Größen  $\tilde{j}, \tilde{j}, \tilde{\theta}, \tilde{\theta}, \dots$  in unabhängige Bedingungsgleichungen auf.

(Bem.: Wenn wir nach  $\tilde{j}$  oder  $\tilde{\theta}$  entwickeln, geben wir den Index a.), wenn wir nach  $\tilde{j}$  oder  $\tilde{\theta}$  entwickeln den Index b.)).

D.h. z.B.

$$(3.3.19) \quad \langle p | \frac{1}{(4\pi)^2} [\partial_x^\mu \alpha \square_\mu \psi^* \partial_\mu \psi, \alpha \square_\mu \psi^* \partial_\mu \psi] | p \rangle \sim \langle p | \tilde{j} | p \rangle$$

bekommt den Gesamtindex:  $\alpha \propto a$

Damit gilt für die folgenden 4 unabhängigen Bedingungsgleichungen 5a. 5b. .  
6a.) 6b.) im einzelnen:

5a.)

Aus

$$(3.3.20) \quad \langle p | [\partial^\mu j_\mu(x), j_\nu(y)] | p \rangle \stackrel{!}{=} 0 \cdot \langle p | \tilde{j} | p \rangle + \dots$$

folgt:

| (3.3.21)                 | 5a.)                                                                                                 |
|--------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\alpha \alpha a$<br>$0$ | $d\beta a$<br>$4\alpha\beta \text{ p.} \partial \partial_v \varepsilon(x_0) \delta(x^1)$             |
| $\alpha \gamma a$<br>$0$ | $\alpha \delta a$<br>$4W_2 \alpha \text{ p.} \partial \partial_v \varepsilon(x_0) \delta(x^1)$       |
| $\beta \alpha a$<br>$0$  | $\beta \beta a$<br>$-\frac{3}{2}\beta^2 \text{ p.} \partial \partial_v \varepsilon(x_0) \delta(x^1)$ |
| $\beta \gamma a$<br>$0$  | $\beta \delta a$<br>$-2\beta W_2 \text{ p.} \partial \partial_v \varepsilon(x_0) \delta(x^1)$        |
| $\gamma \alpha a$<br>$0$ | $\gamma \beta a$<br>$-4\beta W_1 \text{ p.} \partial \partial_v \varepsilon(x_0) \delta(x^1)$        |
| $\gamma \gamma a$<br>$0$ | $\gamma \delta a$<br>$0$                                                                             |
| $\delta \alpha a$<br>$0$ | $\delta \beta a$<br>$-4\beta W_2 \text{ p.} \partial \partial_v \varepsilon(x_0) \delta(x^1)$        |
| $\delta \gamma a$<br>$0$ | $\delta \delta a$<br>$0$                                                                             |

Daraus folgt:

$$(3.3.22) \quad \text{p.} \partial \partial_v \varepsilon(x_0) \delta(x^1) \left[ 4\alpha\beta + 4W_2\alpha - \frac{3}{2}\beta^2 - 2\beta W_2 - 4\beta W_1 - 4\beta W_2 \right] \stackrel{!}{=} 0$$

Dabei sieht man bereits wiederum, daß diese Erhaltungsbedingung 3.3.22

ebenfalls durch

$$A = 1.) + 2a.) + 2b.)$$

erfüllt ist !!

Sowie 5b.)

Aus

$$(3.3.23) \quad \langle p | [\partial^\mu j_\mu(x), j_\nu(y)] | p \rangle \stackrel{!}{=} 0 \langle p | \hat{j}_\nu | p \rangle + \dots$$

folgt:

5b.

|                                                                                      |                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| (3.3.24) $\alpha\alpha b$                                                            | $\alpha\beta b$                                                                      |
| $-2\alpha^2 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$              | $\frac{1}{2} \alpha\beta p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$ |
| $\alpha\beta b$                                                                      | $\alpha\beta b$                                                                      |
| $-4\alpha W_1 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$            | $-2\alpha W_2 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$            |
| $\beta\alpha b$                                                                      | $\beta\beta b$                                                                       |
| $\frac{3}{2} \alpha\beta p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$ | $\frac{3}{4} \beta^2 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$     |
| $\beta\beta b$                                                                       | $\beta\beta b$                                                                       |
| $-6\beta W_1 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$             | $-5\beta W_2 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$             |
| $\gamma\alpha b$                                                                     | $\gamma\beta b$                                                                      |
| $64 W_1^2 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$                | $48 W_1 W_2 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$              |
| $\gamma\alpha b$                                                                     | $\gamma\beta b$                                                                      |
| $-4\alpha W_1 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$            | $-8\beta W_1 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$             |
| $\delta\alpha b$                                                                     | $\delta\beta b$                                                                      |
| $-4\alpha W_2 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$            | $-8\beta W_2 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$             |
| $\delta\beta b$                                                                      | $\delta\beta b$                                                                      |
| $64 W_1 W_2 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$              | $48 W_2^2 p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i)$                |

Daraus folgt:

$$(3.3.25) \quad p \cdot \partial \partial_\nu \varepsilon(x_0) \delta(x^i) \left[ -2\alpha^2 + \frac{1}{2} \alpha\beta - 4\alpha W_1 - 2\alpha W_2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \alpha\beta + \frac{3}{4} \beta^2 - 6\beta W_1 - 5\beta W_2 - 4\alpha W_1 - 8\beta W_1 + 64 W_1^2 \right. \\ \left. + 48 W_1 W_2 - 4\alpha W_2 - 8\beta W_2 + 64 W_1 W_2 + 48 W_2^2 \right] \stackrel{!}{=} 0$$

Dabei sieht man erneut, daß diese Erhaltungsbedingung 3.3.25 ebenfalls durch

$$A = 1.) + 2a.) + 2b.)$$

erfüllt ist !!

Weiterhin zeigt man:

6a.) Aus

$$(3.3.26) \quad \langle p | [\partial^\mu j_\mu(x), j_\nu(y)] | p \rangle \stackrel{!}{=} 0 \cdot \langle p | \tilde{\Theta} | p \rangle + \dots$$

folgt:

6a.

(3.3.27)

|                                                               |                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $\alpha\alpha a$                                              | $\alpha\beta a$                                                                      |
| $8\alpha^2 p_\nu p \cdot \partial$                            | $\alpha\beta(-6 x \cdot p p \cdot \partial \partial_\nu + 4 p_\nu p \cdot \partial)$ |
| $\alpha\gamma a$                                              | $\alpha\delta a$                                                                     |
| $-16\alpha W_1 p_\nu p \cdot \partial$                        | $-8\alpha W_2(p_\nu p \cdot \partial + p \cdot x p \cdot \partial \partial_\nu)$     |
| $\beta\alpha a$                                               | $\beta\beta a$                                                                       |
| $-2\alpha\beta p_\nu p \cdot \partial$                        | $2\beta^2(p \cdot x p \cdot \partial \partial_\nu - p_\nu p \cdot \partial)$         |
| $\beta\gamma a$                                               | $\beta\delta a$                                                                      |
| $4\beta W_1(p_\nu p \cdot \partial + p_\nu p \cdot \partial)$ | $2\beta W_2(2p \cdot x p \cdot \partial \partial_\nu + 2p_\nu p \cdot \partial)$     |
| $\gamma\alpha a$                                              | $\gamma\beta a$                                                                      |
| $-16\alpha W_1 p_\nu p \cdot \partial$                        | $8\beta W_1 p \cdot x p \cdot \partial \partial_\nu$                                 |
| $\gamma\gamma a$                                              | $\gamma\delta a$                                                                     |
| 0                                                             | 0                                                                                    |
| $\delta\alpha a$                                              | $\delta\beta a$                                                                      |
| $-16\alpha W_2 p_\nu p \cdot \partial$                        | $8\beta W_2 p \cdot x p \cdot \partial \partial_\nu$                                 |
| $\delta\gamma a$                                              | $\delta\delta a$                                                                     |
| 0                                                             | 0                                                                                    |

Damit teilt sich die Erhaltungsforderung 6a.) in die beiden unabhängigen Erhaltungsbedingungen auf:

6aI:

$$(3.3.28) \quad p \cdot p \cdot \partial \cdot \varepsilon(x) \delta(x^2) [8\alpha^2 + 4\alpha\beta - 16\alpha W_1 - 8\alpha W_2 - 2\alpha\beta - 2\beta^2 + 8\beta W_1 + 4\beta W_2 - 16\alpha W_1 - 16\alpha W_2] \stackrel{!}{=} 0$$

Und man sieht wiederum, daß, wenn man in 6aI die Aussage

$$A = 1.) + 2a.) + 2b.)$$

substituiert, 6aI erfüllt ist !!

Ferner folgt:

6aII:

$$(3.3.29) \quad x \cdot p \cdot p \cdot \partial \cdot \varepsilon(x) \delta(x^2) [-6\alpha\beta - 8\alpha W_2 + 2\beta^2 + 4\beta W_2 + 8\beta W_1 + 8\beta W_2] \stackrel{!}{=} 0$$

Und erneut gilt auch für 6aII, daß, wenn man die Aussage

$$A = 1.) + 2a.) + 2b.)$$

substituiert, 6aII erfüllt ist !!

Sowie

6b.)

Aus

$$(3.3.30) \quad \langle p | [\partial^\mu j_\mu(x), j_\nu(y)] | p \rangle \stackrel{!}{=} 0 \cdot \langle p | \tilde{\Theta} | p \rangle + \dots$$

folgt

(3.3.31)

6b.

|                                                                                                 |                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\alpha \alpha b$                                                                               | $\alpha \beta b$                                                                                     |
| $\alpha^2 (3 p_v p \cdot \partial + (x \cdot p) p \cdot \partial \partial_v)$                   | $\frac{1}{2} \alpha \cdot \beta (-6 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v - 6 p_v p \cdot \partial)$ |
| $\alpha \gamma b$                                                                               | $\alpha \delta b$                                                                                    |
| $\alpha W_1 (28 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v + 4 p_v p \cdot \partial)$                | $\alpha W_2 (16 p_v p \cdot \partial + 16 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v)$                    |
| $\beta \alpha b$                                                                                | $\beta \beta b$                                                                                      |
| $-\frac{1}{4} \alpha \beta (16 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v + 8 p_v p \cdot \partial)$ | $\beta^2 (-2 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v + 2 p_v p \cdot \partial)$                        |
| $\beta \gamma b$                                                                                | $\beta \delta b$                                                                                     |
| $\beta W_1 (16 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v + 8 p_v p \cdot \partial)$                 | $\beta W_2 (12 p_v p \cdot \partial + 12 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v)$                     |
| $\gamma \alpha b$                                                                               | $\gamma \beta b$                                                                                     |
| $\alpha W_1 (28 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v + 4 p_v p \cdot \partial)$                | $\beta W_1 (28 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v - 4 p_v p \cdot \partial)$                      |
| $\gamma \gamma b$                                                                               | $\gamma \delta b$                                                                                    |
| $-16 W_1^2 (15 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v + 5 p_v p \cdot \partial)$                 | $-20 W_1 W_2 (8 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v + 8 p_v p \cdot \partial)$                     |
| $\delta \alpha b$                                                                               | $\delta \beta b$                                                                                     |
| $\alpha W_2 (4 p_v p \cdot \partial + 28 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v)$                | $\beta W_2 (28 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v - 4 p_v p \cdot \partial)$                      |
| $\delta \gamma b$                                                                               | $\delta \delta b$                                                                                    |
| $-20 W_1 W_2 (12 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v + 4 p_v p \cdot \partial)$               | $-40 W_2^2 (4 p \cdot x p \cdot \partial \partial_v + 4 p_v p \cdot \partial)$                       |

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 & p_v p \cdot \partial \varepsilon(x) \delta(x^2) [3\alpha^2 - 3\alpha\beta + 4\alpha W_1 + 16\alpha W_2 - 2\alpha\beta + \\
 6bI. & + 2\beta^2 + 8\beta W_1 + 12\beta W_2 + 4\alpha W_1 - 4\beta W_1 - 5 \cdot 16 W_1^2 \\
 & - 160 W_1 W_2 + 4\alpha W_2 - 4\beta W_2 - 80 W_1 W_2 - 160 W_2^2] \stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned}$$

(3.3.32)

Substituiert man in 6bI die Aussage  $A = 1.) + 2a.) + 2b.)$ , so sieht man:  
6bI ist erfüllt !

Ferner folgt:

6bII.

$$(3.3.33) \quad x \cdot p \cdot p \cdot \partial \cdot \varepsilon(x) \cdot \sigma(x^2) \left[ \alpha^2 - 3\alpha\beta + 28\alpha W_1 + 16\alpha W_2 \right. \\ \left. - 4\alpha\beta - 2\beta^2 + 16\beta W_1 + 12\beta W_2 + 28\alpha W_1 + 28\beta W_1 \right. \\ \left. - 16 \cdot 15 W_1^2 - 160 W_1 W_2 + 28\alpha W_2 + 28\beta W_2 \right. \\ \left. - 240 W_1 W_2 - 160 W_2^2 \right] \stackrel{!}{=} 0$$

Substituiert man in 6bII die Aussage  $A = 1.) + 2a.) + 2b.)$  so sieht man,  
daß 6bII erfüllt ist !!

Diese Rechnungen zeigen, daß man mit den 3 Parametern  $\alpha = \frac{1}{4}$  ;  $\beta = \frac{1}{2}$  ;  
 $W_1 + W_2 = \frac{1}{16}$  in der Stromdefinition 3.2.22 die folgenden 13 unabhängigen  
Bedingungen erfüllt:

1.) 2a.) 2b.) 3a.) 3b.) 4a.) 4b.) 5a.) 5b.) 6aI) 6aII.) 6bI.) 6bII.).

Da keine weitere Beziehung untersucht wird, bedeutet dies außerdem, daß keine  
Erhaltungsforderung bekannt ist, die nicht erfüllt wäre. Bei all diesen unabhän-  
gigen Bedingungen wird bisher keine Bestimmung für die Kombination  $(W_1 - W_2)$ ,  
die mit einem eichinvarianten Operator  $\partial_\mu f_{\mu\nu}$  verknüpft ist, geliefert.  
Darauf kommen wir in III. § 5. zu sprechen.

Überdies ist uns jetzt eine Methode in die Hand gegeben, in unserem  
Modell zu zeigen, daß bestimmte lokal-eichinvariante Twist-Null-Operatoren  
nicht existieren. So definieren wir z.B. mit 2.1.5 den lokal-eichinvarianten  
symmetrischen Dimension 2 und Twist 0 -Operator  $R_{\mu\nu}$ :

$$R_{(\mu\nu)} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \psi_\beta$$

Für  $R_{(\mu\nu)}$  zeigt man, daß

$$(3.3.35) \quad \langle p | [\partial^\mu j_\mu, R_{(\mu\nu)}] | p \rangle \neq 0, \text{ wenn } R_{(\mu\nu)} \neq 0 \text{ ist.}$$

mit den Werten  $\alpha; \beta; W_1 + W_2$  aus 1.) + 2a.) + 2b.)

Da der Strom aber gemäß der oben genannten 13 Kommutatorrelation mit enormer Konsistenz seine Erhaltung bei der Festlegung 1.) + 2a.) + 2b.) manifestiert hat, folgern wir aus 3.3.35, daß der lokal-eichinvariante Anteil des symmetrischen Twist-Null-Dimension 2-Operators verschwindet, eine Eigenschaft, die wie wir sehen werden, bei der tiefinelastischen Lepton-Hadron-Streuung eine erhebliche Bedeutung hat.

### III. § 4: Konstruktion des erhaltenen Energieimpulstensors

Entsprechend, wie im Fall des Stromes, gehen wir beim Energieimpulstensor vor.

Mit denselben Kommutatorregeln I;II;III des Paragraphen 2 gilt als Kommutatoransatz für den Energieimpulstensor: (siehe 3.2.23)

$$\begin{aligned}
 (3.4.0) \quad \Theta_{\mu\nu} = & \frac{i}{4\pi^2} \left\{ A g_{\mu\kappa} \partial_\kappa \partial_\nu + B \partial_\lambda \partial_\mu \partial_\nu - C \partial_\kappa \partial_\mu \partial_\nu + \right. \\
 & + D g_{\mu\nu} \partial_\kappa \partial_\kappa - E g_{\mu\nu} \partial_\kappa \partial_\kappa - F g_{\mu\kappa} \partial_\kappa \partial_\nu - \\
 & \left. - G \partial_\mu \partial_\nu \partial_\kappa - H g_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\lambda \partial_\kappa \right\} E_0 \psi^*(x-\frac{1}{2}) G_\kappa \psi(x+\frac{1}{2})
 \end{aligned}$$

+ Terme, die im Kommutator nicht beitragen.

Dieser Ansatz soll den Erhaltungsforderungen 3.1.6 genügen, sowie die Generatoreigenschaft des Energieimpulstensors 3.1.7; 3.1.8; 3.1.9 haben. Siehe zu diesem Ansatz 3.2.23 und die Begründung dazu.

1.) Aus den Erhaltungsforderungen für  $\Theta_{\mu\nu}$  folgt - analoger Rechnung wie im letzten Paragraphen für den Strom:

$$(3.4.1) \quad 0 = \frac{3}{4} A - \frac{1}{2} B - 4(C-E) - \frac{3}{2} D + (F+G+H)$$

$$(3.4.2) \quad 0 = -\frac{1}{4} A + \frac{1}{2} B - 4(C-E) - \frac{3}{2} D + (F+G+H)$$

$$(3.4.3) \quad \text{z.B. gezeigt für } \langle p | [\partial^\mu \Theta_{\mu\nu}, R_{\lambda\lambda}] | p \rangle \stackrel{!}{=} 0 \langle p | \tilde{\Theta} | p \rangle + \dots$$

Als weitere Erhaltungsbedingung erhält man relativ unkompliziert in einem Modell mit lokaler  $U_1$  und konstanter  $SU_3$ -Eichinvarianz, in welchem das in III. §5. verwendete  $R_\mu^i$ -Feld lokal-eichinvariant ist,

$$\langle p | [\partial^\mu \theta_{\mu\nu}, R_\mu^i] | p \rangle \stackrel{!}{=} 0. \quad \langle p | \tilde{g}^i | p \rangle + \dots$$

(3.4.4)

$$0 = p_\nu \partial_\nu (-\frac{1}{4}A - \frac{1}{4}B - 2F - G)$$

$$0 = g_{\nu\sigma} p^\sigma (\frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + 2F + G)$$

$$0 = (-\frac{3}{4}A + \frac{3}{2}D - 3(F + G + H))$$

D.h.: Mit der Eigenschaft  $A = B$  aus 3.4.1 und 3.4.2 folgt

(3.4.5)

$$-1/2 A = 2F + G$$

2.) Für die Generatoreigenschaft des Energieimpulstensors, nämlich:

$$(3.4.6) \quad [\theta_{00}(x), \psi(0)]_{x_0=0} = -\frac{1}{4} (\partial_i \delta^3(x)) G_{0i} \psi(0) - \delta^3(x) : \partial_0 \psi(0)$$

$$(3.4.7) \quad [\theta_{0i}(x), \psi(0)]_{x_0=0} = -\frac{1}{8} (\partial_j \delta^3(x)) G_{ij} \psi(0) + \frac{i}{6} (\partial_i \delta^3(x)) \psi(0) - \delta^3(x) : \partial_i \psi(0)$$

folgt sofort, daß man mit Regel III den Lorentz-Rotationsanteil  
 $-\frac{1}{4} (\partial_i \delta^3_j(x)) G_{0i} \psi(x)$  aus 3.4.6 und  $-\frac{1}{8} (\partial_i \delta^3_j(x)) G_{ij} \psi(x)$   
sowie den Dilatationsanteil  $\frac{1}{6} (\partial_i \delta^3_j(x)) \psi(x)$  aus 3.4.7 festlegen  
kann. Dagegen müssen für die Generatoreigenschaft der Translationen die  
Kommutatoren 3.4.6 und 3.4.7 nach  $\partial_\mu \psi$  entwickelt werden, aber gemäß  
Regel III sind Entwicklungen nach eichvarianten Operatoren größerer Dimen-  
sion als 1/2 ausgeschlossen. Wir werden diesen Sachverhalt anschließend  
begründen. Doch zunächst zu der berechenbaren Lorentz-Rotationsbedingung:

$$(3.4.8) \quad \left[ \Theta_{00}(x), \psi(x) \right]_{x_0=0} = -\frac{1}{4} (\partial_i \delta^3_j(x)) G_{0i} \psi(x) + \dots$$

$$(3.4.9) \quad \text{führt zu:} \quad 1/2 = -1/2 A + 2F + G$$

und das führt gemeinsam mit 3.4.5 und 3.4.1, 3.4.2 zu:

$$(3.4.10) \quad A = B = -1/2$$

Man verifiziert sofort, daß mit 3.4.10, 3.4.9, 3.4.5 für den räumlichen  
Lorentzrotationsanteil die Bedingung

$$\left[ \Theta_{0i}(x), \psi(x) \right]_{x_0=0} = -\frac{1}{8} (\partial_j \delta^3_k(x)) G_{ij} \psi(x) + \dots$$

erfüllt ist.

Mit 3.4.10 kennen wir den wichtigsten Anteil des Energieimpulstensors,  
nämlich den, der nur aus den inneren Ableitungen aufgebaut ist. Für alle an-  
deren Beiträge zum Energieimpulstensor gilt, daß die zugehörigen Vorwärts-  
matrixelemente wegen der äußeren Ableitungen verschwinden und damit bei den  
sehr relevanten Summenregeln (siehe III. § 6) keinen Beitrag liefern.

In der Definition 3.4.0 sind i. b. Spurterme enthalten. Rechnungen der  
Art 3.4.1 und 3.4.2 berücksichtigen nur Anteile des Energieimpulstensors der  
dynamischen Dimension 4. Nun sind gerade die konventionellen Aussagen über das  
P.C.D.C.- (Partial Conservation of Dilatation Current) Verhalten<sup>(20)</sup> von

$\partial_\mu D^\mu = \Theta_\mu^\mu$  ( $D^\mu$  = Dilatationsstrom), nämlich nur Beiträge kleinerer dynamischer Dimension als 4 zu haben, etwas zu voreilig; i.b. kann es gerade durch reinen Wechselwirkungseffekt eintreten, daß  $\Theta_\mu^\mu$  Beiträge der dynamischen Dimension 4 (21). Zudem haben wir in unserem Modell mehrere verschiedene Spurterme und es kann dann eintreten, daß diese Spurterme untereinander bezüglich ihrer dynamischen-Dimension 4-Beiträge bestimmte Korrelationen haben (19).

Bevor wir nicht diese Eigenschaften der Spur des Energieimpulstensors untersuchen, hat es wenig Sinn die dazugehörigen Koeffizienten zu bestimmen. Wir begnügen uns deshalb mit der Aussage 3.4.10, die uns alle Kenntnis über den Energieimpulstensor liefert, wie wir sie für die Summenregeln der tiefinelastischen Lepton-Hadron-Streuung benötigen.

Nun zu der Problematik der Festlegung der Generatoreigenschaft der Translationen, die sich uns ja gemäß Regel III einer Berechnung entziehen.

Wir zeigen dazu:

$$(3.4.11) \quad [\Theta_{00}(x), \psi(x)] \stackrel{x_0=0}{=} \underbrace{\partial_0 \square_\xi [\psi(x-\frac{x}{2}) \phi_0 \psi(x+\frac{x}{2}), \psi(x)]}_{\text{I}} + \underbrace{\partial_0 \partial_0 \partial_\mu [\psi^* \phi_\mu \psi, \psi(x)]}_{\text{II}} + \dots$$

Wir betrachten im folgenden nur einen Anteil aus dem Term II von 3.4.11.

$$\text{II} \cong \partial_0 \partial_0 \partial_\mu \phi_\mu \phi_\nu (x-\frac{x}{2}) \delta((x-\frac{x}{2})_0) \delta((x-\frac{x}{2})^2) \psi(x+\frac{x}{2}) \psi(x-\frac{x}{2}; \frac{x}{2}-\frac{x}{4})$$

$\phi =$  bedeutet: ist unter anderem enthalten.

$$c = \partial_0 \partial_1 \partial_2 4(x + \frac{1}{2}) R^\vee(\frac{x}{2} - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2})_\vee G_\mu G_\rho \cdot \\ \cdot \left[ (x - \frac{1}{2})^2 \delta^3(x - \frac{1}{2}) \cdot g_{50} + \frac{1}{6} (x - \frac{1}{2})_\rho (x - \frac{1}{2})^3_\rho \Delta \delta^3(x - \frac{1}{2}) \right]$$

$$c = G_\mu G_\rho \left[ \frac{(\frac{x}{2} + \frac{3}{4})_\vee (x - \frac{1}{2})^\vee}{(\frac{x}{2} + \frac{3}{4})^2} \right] \left[ \partial_0 \partial_1 \partial_2 4(x + \frac{1}{2}) \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[ (x - \frac{1}{2})_\rho (x - \frac{1}{2}) \delta^3(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{6} (x - \frac{1}{2})_\rho (x - \frac{1}{2})^3_\rho \Delta \delta^3(x - \frac{1}{2}) \right] \right] + \\ \lim_{x_0 \rightarrow 0} \lim_{\xi \rightarrow 0}$$

$$+ G_\mu G_\rho \partial_1 \left\{ (x - \frac{1}{2})_\vee : 4 R^\vee : \partial_0 \partial_1 \left[ (x - \frac{1}{2})^2 \delta^3(x - \frac{1}{2}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{6} (x - \frac{1}{2})_\rho (x - \frac{1}{2})^3_\rho \Delta \delta^3(x - \frac{1}{2}) \right] \right\} \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \lim_{x_0 \rightarrow 0}$$

Daraus berechnet man sofort Terme der Art

$$(3.4.12) \quad \partial_0 4 \cdot \delta^3(x) \quad , \quad (\partial^i 4)(G_0 G_i) \delta^3(x) \\ : 4 R_0 : \delta^3(x) \quad , \quad : 4 R^i : G_0 G_i \delta^3(x)$$

Analog berechnet man Beiträge der Art. 3.4.12 aus anderen Termen von 3.4.10.

Dabei sind zunächst die Koeffizienten, mit denen diese Terme 3.4.12 insgesamt auftreten, in 3.4.10 unbestimmt und hängen von der Operatorentwicklung

$$(3.4.13) \quad \psi(x + \frac{1}{2}) \cdot \mathcal{E}(x - \frac{1}{2}; \frac{x}{2} - \frac{1}{4})$$

ab (22).

Man kann spekulieren, daß, wenn man Produkte der Art. 3.4.13 beherrscht, dann auch mit der speziellen Struktur des Energieimpulstensors wie sie aus 3.4.8 folgt, auf Grund der Generatoreigenschaft der Zeittranslationen über die Hamiltonfunktion eindeutig die Feldgleichung folgt (23).

Bem.: Der Nachweis der Schwingeralgebra ist wegen des rein quantitativen Rechenaufwandes nicht ausgeführt worden, obwohl das prinzipiell möglich wäre und "sicher" auch positiv ausfällt. In jedem Fall erwartet man für die Schwingeralgebra wegen unserer eichinvarianten  $R_{\mu\nu}$ -Felder die zusätzliche Boulware-Deser Modifikation von Schwingertermen  $\sim \partial\partial\partial\delta^3(x) \cdot Q$  wie sie aus Lorentz-Kovarianzgründen auch folgen müssen, aber in den meisten Modellen nicht nachgewiesen werden können (24). Allgemein führen diese  $R_{\mu\nu}$ -Felder auch auf die Möglichkeit der Schwingerterme in  $\{j_0, j_i\}$ -Kommutatoren. (i räumlich).  $x_0=0$

### III. § 5: Das $U_1^8 \times SU_3$ invariante selbstwechselwirkende Spinormodell

Das bisher untersuchte Modell hat zuwenig algebraische Struktur, um direkt einen Vergleich mit physikalischen Phänomenen ausführen zu können. Wir bereichern die Struktur dadurch an, daß wir eine konstante  $U_1 \times SU_3$  Invarianz sowie eine lokale  $U_1$ -Invarianz für die Theorie fordern (26). Dies läßt sich dann als eine selbstwechselwirkende Quarktheorie bzw. als eine Quark-Gluontheorie (27), in der die Gluons aber selbst aus Quarks aufgebaut sind, auffassen.

Im Vergleich zu den vorangegangenen Paragraphen stellt man sofort fest, daß natürlich die Gültigkeit der Generator- und Erhaltungseigenschaft genau wie in 1.) 6bII.) aus III. § 3 bestehen bleibt und man als Stromoktett für die Kommutatorrelationen den "effektiven" Ausdruck hat:

$$(3.5.1) \quad j_\mu^i(x) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ [\alpha \square, g_{\mu\lambda} + \beta \partial_\mu \partial_\lambda] \psi^a(x) \sigma_\lambda \frac{\gamma^i}{2} \psi^a(x) + w_1 \square R_\mu^i(x) + w_2 \partial_\mu \partial_\lambda R_\lambda^i(x) \right\}$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{1}{4} ; \beta = \frac{1}{2} ; w_1 + w_2 = \frac{1}{16} , \quad i = 1, \dots, 8$$

Für den Energieimpulstensor als Singlet erhält man ohnehin wieder die Definition 3.4.0. Damit verifiziert man das erstaunliche Resultat, daß für solche  $SU(3)$ -Ströme schon bereits die gleichzeitige Stromalgebra automatisch folgt. Der Nachweis dafür ist bisher der Einfachheit wegen nur für  $\langle p | \dots | p \rangle$  - Matricelemente erbracht worden

Man zeigt:

$$(3.5.2) \quad \langle p | [j_0^i(x), j_0^j(y)] | p \rangle = \frac{1}{2\pi} i f_{ijk} 2 \cdot \frac{3}{2} \partial_0 (\varepsilon(x_0) \delta(x^2)) \cdot \langle p | \tilde{j}_0^k + \tilde{j}_0^k | p \rangle$$

Ferner gilt trivialerweise mit  $\alpha = \frac{1}{4} ; \beta = \frac{1}{2}$  sowie 3.3.5

$$(3.5.3) \quad j_\mu^i = 3 \tilde{j}_\mu^i + 3 \tilde{j}_\mu^i$$

D.h. Man erhält:

$$(3.5.4) \quad \langle p | [j_0^i(x), j_0^j(0)] | p \rangle = i f_{ijk} \delta^3(x) \langle p | j_0^k | p \rangle$$

Darüber hinaus hat man bei dieser Erweiterung der Gruppenstruktur der Theorie, eine einfache Möglichkeit, auch den Koeffizienten  $W_2$  aus 3.2 22 einzeln zu bestimmen, denn es muß gelten:

$$(3.5.5) \quad [j_0^i(x), \sigma_{\alpha\beta}^j(y)]_{(x-y)_0=0} = i f_{ijk} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \sigma_{\alpha\beta}^k$$

Dann sieht man z.B. für:

$$(3.5.6) \quad \sigma_{\alpha\beta}^j(y) = R_{0,0}^j(y)$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{1}{4} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

$$(3.5.7) \quad [j_0^i(x), R_{0,0}^j(y)]_{(x-y)_0=0} = i f_{ijk} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) R_{0,0}^k \left[ \frac{3}{8} + \frac{6}{8} - 2(W_1 + W_2) \right] + i f_{ijk} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) R_{r,r}^k \left[ \frac{5}{8} - \frac{1}{8} + 4W_2 \right]$$

$r \equiv \text{räumlich}$

Damit dann 3.3.39 erfüllt ist,

folgt:

$$(3.5.8) \quad \frac{3}{8} + \frac{6}{8} - 2(W_1 + W_2) = 1$$

und daraus folgt  $W_1 + W_2 = 1/16$

(siehe  $A = 1., + 2a.) + 2b.)$ )

sowie

$$(3.5.10) \quad \frac{5}{8} - \frac{1}{8} + 4W_2 = 0$$

und daraus folgt

$$(3.5.11) \quad W_2 = -\frac{1}{8}$$

Ein Diskussionspunkt zu Paragraphen III. 3, 4, 5:

Unser aus Erhaltungsforderung und Generatoreigenschaft eindeutig bestimmter Strom

$$j_\mu(x) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \left[ \frac{1}{4} \square_\mu \partial_\nu \psi + \frac{1}{4} \partial_\mu \partial_\nu \psi \right] \psi^*(x) \right\} G_\mu + \psi(x) \left\{ \right. \\ \left. + W_1 \square_\mu R_\mu(x) + W_2 \partial_\mu \partial_\nu R_\nu(x) \right\} +$$

+ andere Terme, die im Kommutator nicht beitragen.

mit  $W_1 + W_2 = 1/16$

in seinen Eigenschaften für Kommutatorrelationen, sowie die sogar noch weitergehende Bestimmung  $W_2 = -1/8$  und damit  $W_1 = 3/16$ , wenn man die Gruppenstruktur mit Nicht-Abelschen Freiheitsgraden erweitert, wie in 3.3.42 gezeigt, manifestiert eindeutig, daß unsere Theorie keine freie Theorie in den  $\psi$ -Feldern darstellt. Denn um die Erhaltung des Stromes in seinen Kommutatorrelationen zu bekommen, brauchen wir notwendig den Subterm  $R_{\mu\nu}$ , der bei uns echte Beiträge liefert. In einer freien Theorie der  $\psi$ -Felder würde aber wegen  $\psi^2 \bar{\psi} = \bar{\psi} \psi = 0$  auch  $\frac{1}{2} \partial_\mu \psi^* G_\mu \bar{\psi} \psi$  identisch verschwinden, und das steht im Gegensatz zu unserem Modell. Dasselbe gilt ebenfalls beim Energieimpulstensor des III. § 4, für dessen Definition ebenfalls aus Erhaltungsgründen der Subterm  $R_{\mu\nu}$  auftritt.

Daß dieser klare Hinweis für eine echte Wechselwirkung in unserem Modell so manifest auftritt, ist auch nicht verwunderlich, da wir ja von vornherein die lokale Eichinvarianz der Theorie gefordert haben, was natürlich eine freie Theorie ausschließt.

III. § 6: Lichtkegelkommutator zweier Ströme in einem  $U_1^8 \times SU_3$ -invarianten selbstwechselwirkenden Spinormodell

Mit den in den vorangegangenen Paragraphen 2 bis 5 angegebenen Methoden ist der Lichtkegelkommutator zweier Ströme eindeutig festgelegt. Legen wir z.B. für die Gruppenstruktur unserer Spinortheorie eine lokale  $U(1)$  und Konstante  $SU(3)$  zu Grunde, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 (3.6.1) \quad & \langle p, N | [j_\mu^i(x), j_\nu^j(x)] | p, N \rangle = \\
 & = \left\{ g_{\mu\nu} \left[ f_{ijk} \partial_\kappa \langle j_\sigma^k \rangle + d_{ijk} \frac{13}{16} \partial_\sigma x_\lambda \langle \Theta_{\lambda\kappa}^k \rangle \right] \right. \\
 & \quad - (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \square) \left[ f_{ijk} \frac{1}{3} x_\sigma \langle j_\sigma^k - j_\sigma'^k \rangle + \right. \\
 & \quad \left. + d_{ijk} \left( \frac{1}{8} x_\kappa x_\lambda \langle \Theta_{\kappa\lambda}^k - \Theta_{\kappa\lambda}'^k \rangle - \frac{11}{128\pi^2} \langle R_{\sigma\sigma}^k \rangle \right) \right] - \\
 & \quad - \varepsilon_{\mu\nu\kappa} \partial_\sigma \left[ f_{ijk} \frac{1}{8\pi^2} \partial_\lambda \langle R_{[\kappa\lambda]} \rangle + \frac{\varepsilon}{4} x_\lambda \langle \Theta_{\lambda\kappa}'^k \rangle \right. \\
 & \quad \left. + d_{ijk} \langle j_\kappa'^k \rangle \right] - \\
 & \quad \left. - \frac{3}{64\pi^2} f_{ijk} \partial_\sigma \partial_\mu \varepsilon_{\nu\sigma\kappa} R_{\sigma\kappa}^k \right\} \frac{i}{2\pi} \varepsilon(x^0) \delta(x^2) + \dots
 \end{aligned}$$

mit 
$$j_\mu'^k(x) = \frac{1}{96\pi^2} (5R_{\mu\sigma\sigma}^k - 2R_{\sigma\sigma\mu}^k)$$

$$\Theta_{\mu\nu}'^k(x) = -\frac{1}{32\pi^2} (3R_{(\mu\nu)\sigma\sigma}^k - R_{\sigma\sigma\mu\nu}^k)$$

Bem.: Dadurch, daß man sich auf die Vorwärtsmatrixelemente  $\langle p | \dots | p \rangle$  beschränkt - das entspricht den gegenwärtigen Experimenten zu den tiefinelastischen Prozessen - verschwinden alle Matrixelemente, die äußere Ableitungen haben.

i.b. gilt dabei trivialerweise wegen 3.3.5 und 3.4.10 sowie 3.5.3

$$(3.6.2) \quad \Theta_{\mu\nu} = -8 (\tilde{\Theta}_{\mu\nu} + \tilde{\tilde{\Theta}}_{\mu\nu})$$

$$(3.6.2) \text{ bzw. } j_\mu = 3 (\tilde{j}_\mu + \tilde{\tilde{j}}_\mu)$$

Das Produkt zweier Ströme am Lichtkegel hat seine physikalische Relevanz in den Relationen der tiefinelastischen Streuung (28):

Mit 3.5.4 betrachtet man dazu: (Bei Verdopplung der Weylspinores zu Diracspinores)

$$(3.6.4) \quad \frac{1}{4\pi} \int d^4x \langle N, p | [j_\mu^i(x), j_\nu^j(y)] | N, p \rangle e^{-iq \cdot (x-y)} \quad \text{L.K.}$$

mit  $q$  = Energieimpulsübertrag, L.K. = Lichtkegel

$$(3.6.5) \quad p = \text{Proton-Viererimpuls}$$

$$\{ = -\frac{q^2}{2p \cdot q} \equiv \text{Konstant im Bjorkenlimes mit } q^2 \rightarrow \infty, p \cdot q \rightarrow \infty$$

Dann folgt aus 3.5.4 (siehe BDW II) für die Adlersche Summenregel:

$$(3.6.6) \quad \int_0^1 \frac{d\xi}{\xi} (F_2^{\nu p}(\xi) - F_2^{\nu n}(\xi)) = 2$$

und dieser Wert 2 ist eine direkte Folge aus der Gültigkeit der gleichzeitigen Stromalgebra.

Für die sehr wichtige Energieimpulstensor-Summenregel, die die Wechselwirkung testet, erhalten wir in unserem Modell einer selbstwechselwirkenden Quarktheorie aus 3.5.4

$$(3.6.7) \quad 6 \int_0^1 (F_2^{\nu p} + F_2^{\nu n}) d\xi - \int_0^1 (F_2^{\nu p} + F_2^{\nu n}) d\xi = \frac{4}{3} \cdot \frac{13}{16} \approx 1.08$$

Der experimentell gefundene Wert für diese Summenregel ist zur Zeit  $0.8 \pm 0.4$ .

Das einzige andere Modell, das Angaben zu dieser Energie-Impulstensor-Summenregel machen kann, ist das freie Quark-Modell von Fritzsche und Gell-Mann (29), welches den Wert  $4/3$  liefert und sich damit von unserem Resultat  $4/3 \cdot 13/16$  unterscheidet und außerhalb der experimentell gemessenen Werte liegt.

Über diese Ergebnisse hinaus, sieht man aus 3.6.1 eine ganze Reihe interessanter Sachverhalte.

1.) Es scheinen in 3.6.1 keine symmetrischen Twist-Null-Operatoren aufzutreten. Der Koeffizient zu  $R_{\mu}^i$  ist  $(\beta + W_2 + \gamma)$  und ist deshalb wegen 3.5.11 und  $f^{-1} + 2a + 2b = 0$  gleich Null.

Die  $R_{\mu}^{o,i}$  verschwinden als lokal-eichinvariante Operatoren wegen der Erhaltung des Stromes (siehe Folgerung aus 3.3.35). Symmetrische lokal-eichinvariante Twist-Null-Operatoren von höherer Dimension als 2 haben wir bisher in dieser Eigenschaft nicht untersucht. Wir vermuten aber, daß auch diese wegen der Erhaltung des Stromes verschwinden.

Für lokal-eichinvariante Twist-Null-Operatoren mit gerader Dimension gibt es Hinweise dafür, daß zumindest ihre Matrixelemente verschwinden.

2.) Im Gegensatz zur freien Quarktheorie tritt der antisymmetrische lokal-eichinvariante Operator  $R_{[\mu\nu]}^{o,i}$  auf, der für  $R_{[\mu\nu]}^o$  in Zusammenhang mit den Adlertermen steht, die bei der Divergenz des Axialvektorstroms auftreten. Außerdem führt das Auftreten dieser  $R_{[\mu\nu]}^o$ -Terme bei Verwendung von polarisiertem Target vielleicht zu meßbaren Konsequenzen.

3.) Auf Grund des besonderen Wertes für  $W_2 = -1/8$  aus 3.5.11 kombinieren sich die  $\sim g_{\mu\nu}$ -Terme für den 4-dimensionalen Twist-2-Operator gerade zum Energieimpulstensor und führen auf eine "Sugawara"-ähnliche Situation, wie sie von Groß und Callan (30) behandelt ist.

4.) Es scheinen zunächst longitudinale Anteile  $\sim (\partial_\mu \partial_\nu - g_{\mu\nu} \square)$  mit Twist-Zwei-Operatoren  $\sim R_{\lambda\lambda}^{o,k}$  und  $\sim (S R_{\mu\lambda}^{o,k} + R_{\lambda\mu}^{o,k})$  mit gerader Dimension aufzutreten. Betrachtet man aber im Kommutator 3.6.1 nur die Diagonal-Elemente  $i = j$  so kann man zeigen, daß auf Grund der Positiv-Definitheit ihre Vorwärtsmatrix-

elemente verschwinden müssen..

i.b.

$$(3.6.8) \quad \begin{aligned} & \langle p | R_{\lambda\lambda}^{0,k} | p \rangle = 0 \\ & -\frac{1}{2} \langle p | \tilde{\Theta}_{(p)}^{0,k} | p \rangle = \langle p | \tilde{\Theta}_{(q)}^{0,k} | p \rangle \end{aligned}$$

5.) Im Gegensatz zur freien Quarktheorie kann aber der longitudinale Anteil mit Strom-artigen Operatoren möglicherweise überleben. Es kann aber auch eintreten, was wir noch nicht gezeigt haben, daß ähnliche Bedingungen wie 3.6.8 existieren, wodurch dann die Matrixelemente dieser Operatoren  $\sim \langle p | j_r^{0,k} | p \rangle$  sind, und somit die Koeffizienten auch verschwinden können

6.) Da alle Operatoren in 3.6.1 Twist  $\geq 2$  haben, gilt für alle Strukturfunktionen das richtige Verhalten unter Bjorken-scaling.

7.) Zusätzlich dazu, daß wir in unserem Modell das Scaling Verhalten haben, kommen wir im Gegensatz zum freien Quark-Modell nicht von vorneherein in Schwierigkeiten mit dem frühen Einsetzen des Scalings: In den konventionellen Quarktheorien muß man den Quarks eine hohe Masse geben, um zu erklären, daß sie bei den bisherigen Energien nicht gesehen worden sind. Diese hohe Quarkmasse schiebt aber das Scaling heraus, so daß man dort zu dem experimentell beobachteten frühen Einsetzen des Scaling in Widerspruch gerät. In unserem Modell dagegen können wegen der Dimension  $1/2$  der wechselwirkenden abstrakten Quarks diese nicht asymptotisch auslaufen, so daß sich uns dieses Problem nicht von Beginn an stellt.

### Einige kurze Schlußbemerkungen

In Kapitel I haben wir in dieser Arbeit nicht die Frage untersucht, inwieweit die Wilsonentwicklung dadurch, daß der Split-Vektor auch die Zeit enthält, den Charakter der Feldgleichung abändert. Das wäre eine interessante Frage, zumal sich aus der Methode des Kapitels III vielleicht eine Möglichkeit öffnet, wie es auf Seite (90) angedeutet ist, die Feldgleichung aus der genauen Kenntnis des haltenen Energieimpulstensors über die Wilsonentwicklung abzuleiten.

In Kapitel II wäre es interessant die  $4\text{-}\Psi$ -Produkte vielleicht mit ähnlichen Methoden, wie sie für die  $2\text{-}\Psi$ -Produkte ausgeführt sind, zu studieren, um auf diese Weise auch von dort her eine Verbindung zu den Ergebnissen des Kapitels III zu bekommen.

Wir haben in Kapitel III nicht explizit eine Feldgleichung verwendet. Aber wir haben gesehen, daß wir mit der hier durchgeführten Methode, die Erhaltung des Stromes bzw. Energieimpulstensors über Kommutatorrelationen in einer enormen Konsistenz festlegen konnten und dabei zu einer eindeutigen Kombination der Subterme des Stromes bzw. Energieimpulstensors gelangten.

Um dieses Programm der sehr komplizierten Kommutatorrelationen überhaupt durchführen zu können, mußten wir in Kapitel II. § 2 drei Regeln formulieren, die alles andere als trivial sind, und die wir bisher nicht beweisen können. Die Schwierigkeiten zum Beweis solcher Regeln liegen in der Problematik von Doppel-Wilson-Entwicklungen. Überlegungen zur Beherrschung solcher Entwicklungen werden i. b. von H.P. Dürr zur Zeit durchgeführt. Daß wir starkes Vertrauen zu diesen Regeln haben können, darauf weist die enorme Konsistenz dieser Regeln bei den ganz wesentlich verschiedenen Kommutatorrelationen hin, in denen immer wieder die Erhaltung des Stromes manifestiert wird.

Ferner sollte man versuchen, mit der in Kapitel III eingeführten Methode auch Produkte von mehr als zwei Strömen zu untersuchen, um diese Operatorprodukte in Verbindung mit physikalischen Phänomenen zu bringen.

Herrn Prof. Dürr bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für die sehr vielen und außerordentlich hilfreichen Diskussionen zu großem Dank verpflichtet. Der Max-Planck-Gesellschaft danke ich für ein Promotionsstipendium.

### Literaturverzeichnis

- (1) W. Heisenberg: Introduction to the Unified Field Theory of Elementary Particles, Wiley Ltd., London (1966).  
Deutsche Ausgabe: Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, Hirzel Verlag, Stuttgart (1967).
- (2) K.G. Wilson: Cornell report, On Products of Quantum Field Operator at short Distances, 1964, unveröffentlicht.
- (3) S. Sakata, H. Umezawa, and S. Kamefuchi: Progr. Theoret. Phys. (Kyoto) 7, 377 (1952); H. Umezawa, ibid. 7, 551 (1952).
- (4) K. Symanzik: Commun. Math. Phys. 18, 227 (1970).  
K. Wilson: Phys.Rev. D2, 1478 (1970).  
C. Callan: Phys.Rev. D2, 1541 (1970)  
S. Coleman and R. Jackiw: MIT report, unpublished.
- (5) J. Lowenstein: Commun. Math. Phys. 16, 265.  
K. Wilson: Phys.Rev. D2, 1473 (1970)  
G.F. Dell'Antonio, Y. Frishman, and D. Zwanziger: Weizmann Institute preprint.  
A.H. Müller and T.L. Trueman: Phys.Rev. D4 (Sept. 1971)  
A.H. Müller, T.L. Trueman, and K. Wilson: Brookhaven preprint BNL-16104.
- (6) R. Utiyama: Phys.Rev. 101, 1597 (1956).
- (7) C.N. Yang, R.L. Mills: Phys.Rev. 96, 191 (1954).
- (8) Hendricus G. Loos: Wilson expansions and the Dürr-Winter identifications of gauge potentials, Cleveland State University-preprint 1972).
- (9) H.P. Dürr: Zeits. Naturforschung 16a, 327 (1961).
- (10) W. Zimmermann: Nuovo Cimento, 10, 597 (1958);  
Commun.Math.Phys. 6, 161 (1967); 8, 66 (1968).  
R.A. Brandt: Ann. of Physics, 44, 221 (1967); 52, 122 (1969);  
Phys.Rev. 1490 (1969).

- (11) H.P. Dürr and N.J. Winter: *Nuovo Cimento*, 70A, 467 (1970).  
Im folgenden als DWI bezeichnet.
- (12) K. Johnson: *Nuovo Cimento*, 20, 773 (1961).
- (13) H.P. Dürr and N.J. Winter: *Nuovo Cimento*, 7A, 461 (1971).  
Im folgenden als DWII bezeichnet.
- (14) R.A. Brandt: *Ann. of Physics* 52, 122 (1969); *Phys.Rev.* 180, 1490 (1969).  
R.A. Brandt and G. Preparata: *Nucl.Phys.* 27B, 541 (1971).  
K.G. Wilson: *Phys.Rev.* 179, 1499 (1969).
- (15) Private Mitteilung von K. Wilson sowie R.A. Brandt.
- (16) Ansätze dazu: R.A. Brandt and G. Preparata: N.Y.U. Technical Report 15/72.  
K. Wilson: *Proceedings on International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies*, Cornell University 1971, S.116.
- (17) R.A. Brandt: *Phys.Rev.* 180, 1490 (1969).
- (18) I.I.Y. Bigi, H.P. Dürr, N.J. Winter: Current algebra for a spinor theory with selfinteraction, Nov. 1972. Im folgenden als BDW I bezeichnet, (zur Veröffentlichung in *Physics Letters*).
- (19) R. Jackiw: *Dilatation Symmetry and Light-Cone Commutators*, MIT-preprint.  
Extended version of lectures delivered at the University of Turin, June 1971; and the Desy Summer School, July 1971.
- (20) G. Mack: *Nucl. Phys.* B5, 499, sowie dort zitierte Referenzen.
- (21) Siehe 19, sowie dort Seite 69 zusammengefaßte Referenzen.
- (22) Untersuchungen zu diesen "Doppelt"-Wilsonentwicklungen werden zur Zeit i.b. von H.P. Dürr durchgeführt.
- (23) Für diesen Hinweis, die Feldgleichung aus unserer detaillierten Kenntnis des durch Erhaltungsbedingungen festgelegten Energieimpulstensors in unserem Modell abzuleiten, danke ich in privater Diskussion M. Gell-Mann.

- (24) D.G. Boulware, S. Deser: J.of Math. Phys. 8, 1468 (1967).
- (25) R.A. Brandt: Phys.Rev. 166, 1795 (1968).
- (26) I.I.Y. Bigi, H.P. Dürr, N.J. Winter: Light Cone Algebra of a Self-interacting Quark Field, Jan. 1973. Im folgenden als BDWII bezeichnet (zur Veröffentlichung in Physics Letters).
- (27) D.J. Gross and S.B. Treiman: Phys.Rev. D4, 1059 (1971).
- (28) R.A. Brandt: Phys.Rev. Letters 23, 1260  
B.L. Joffe: Phys.Letters 30B, 123 (1969).  
R.A. Brandt, G. Preparata: Phys.Rev. Letters 26, 42 (1971).
- (29) H. Fritzsch, M. Gell-Mann: Light-Cone Current Algebra. Talk presented at International Conferences on Duality and Symmetry, Tel-Aviv, Israel, April 5-7, 1971.
- (30) D.J. Gross: Phys.Rev. Letters 21, 308 (1968).  
D.J. Gross and C.G. Callan: Phys.Rev. Letters 22, 156 (1969).

### Lebenslauf

Am 30.5.1942 wurde ich als Sohn des Dr.jur. Julius Winter, Vorsitzender des Vorstandes einer Versicherungsgesellschaft, und seiner Ehefrau Anna Marianne Winter, geb. Schleiermacher in Erfurt geboren. Die ersten Jahre lebte ich in Gotha, bis wir 1946 von Gotha nach Göttingen umsiedelten. 1948 wurde ich dort in die Albani-Volksschule eingeschult. Nach vier Jahren Grundschule wechselte ich auf das altsprachliche Max-Planck-Gymnasium in Göttingen, an dem ich im Februar 1962 mein Abitur machte. Zum Sommersemester 1962 schrieb ich mich an der Universität Heidelberg für Physik ein und absolvierte im Nov. 1964 dort mein Vordiplom in Physik. Während dieser meiner Heidelberger Zeit habe ich an einer Reihe von philosophischen Seminaren i.b. bei Prof. Wiehl teilgenommen. Zum Sommersemester <sup>1965</sup> wechselte ich an die Ludwig-Maximilians-Universität München. Im Sommer 1967 begann ich bei Prof. Dürr mit einer Diplomarbeit zur Paritätssymmetrie in der nichtlinearen Spinorthorie. Januar 1969 legte ich die Hauptdiplomprüfung an der Universität München ab. Anschließend begann ich mit der vorliegenden Doktorarbeit. Seit April 1969 arbeite ich als Stipendiat, seit Dezember 1972 als wissenschaftlicher Angestellter am Max-Planck-Institut für Physik in München.

Im Sept. 1970 heiratete ich Helga Reinecke.



